

PROJETO DE GRADUAÇÃO

Análise das Condições de Contato entre Fios de Cabos Condutores de Energia

Por,
Rafael Hikari Frabetti Yamaoka

Brasília, 27 de Junho de 2014

UNIVERSIDADE DE BRASILIA

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

PROJETO DE GRADUAÇÃO

Análise das Condições de Contato entre Fios de Cabos Condutores de Energia

POR,

Rafael Hikari Frabetti Yamaoka

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Prof. Jorge Luiz de Almeida Ferreira, UnB/ ENM
(Orientador)

Prof. José Alexander Araújo, UnB/ ENM

Prof. Antônio Manoel D. Henriques, UnB/ ENM

Brasília, 27 de junho de 2014

Dedicatória

À minha mãe Maria Cristina Frabetti Yamaoka e a meu pai Kenji Yamaoka, por todo apoio prestado durante toda minha graduação, que me permitiu superar as dificuldades encontradas e assim vencer esta etapa.

Rafael Hikari Frabetti Yamaoka

Agradecimentos

À minha família, com que eu pude contar nos piores e melhores momentos.

Ao meu orientador Jorge Luiz de Almeida Ferreira, pelo direcionamento e atenção durante a realização do projeto.

Aos meus amigos, que nos momentos de descontração tornaram esse percurso mais alegre.

Rafael Hikari Frabetti Yamaoka

Este trabalho tem como objetivo a criação e validação de um modelo para simulação numérica a partir de elementos finitos do contato entre fios. Para isso, foi utilizado o software comercial ANSYS utilizando a linguagem APDL (*ANSYS Parametric Design Language*). Foi tomado como referência as dimensões geométricas e propriedades dos materiais utilizadas no cabo Grosbeak. Os resultados das simulações foram comparadas com resultados analíticos obtidos por Hertz. O modelo obtido poderá ser utilizado como base para o seguimento do trabalho e para trabalhos posteriores, que apresentem maior complexidade geométrica e condições de contorno mais próximas da realidade existente em cabos condutores de energia elétrica do tipo CAA (Cabos de Alumínio com alma de Aço). O conhecimento obtido pode permitir a criação de projetos mais econômicos e confiáveis para linhas de transmissão.

ABSTRACT

The aim of this work is to develop and validate a model for numerical simulation using finite elements from contact between wires. Therefore, the commercial software ANSYS using APDL (*ANSYS Parametric Design Language*) is used. The geometric dimensions and material properties used in the Grosbeak cable, were taken as a reference. The simulation results were compared with the analytical results obtained by Hertz. The code obtained could be used as basis in this work and also in subsequent works, which presents greater geometric complexity and boundary conditions more similar than the existing in cables conductors of electricity type CAA (Aluminium Cables soulful Steel). The knowledge obtained could allow the creation of more economical and reliable designs for transmission lines.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	OBJETIVO.....	5
1.2	JUSTIFICATIVA	5
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	6
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	7
2.1	MECÂNICA DO CONTATO.....	7
2.2	O PROBLEMA DE CONTATO DE HERTZ.....	10
2.3	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	12
2.4	ANSYS E LINGUAGEM APDL	17
3	MÉTODO DE MODELAGEM	18
3.1	CONDIÇÕES DE CONTORNO E ELEMENTO DE CONTATO.....	19
3.2	GEOMETRIA E PROPRIEDADES DOS MATERIAIS	21
3.3	TIPO DE ELEMENTO E MALHA.....	25
4	RESULTADOS.....	26
4.1	ANÁLISE DA VALIDADE DO MODELO ELÁSTICO	30
4.2	MODELO ELÁSTO – PLÁSTICO	33
5	CONCLUSÃO	40
5.1	PROPOSTA PARA TRABALHOS FUTUROS	41
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	41
	ANEXOS.....	43
	A – CÓDIGO APDL	43
	B – ROTINA NO MATLAB PARA COMPARAÇÃO RESULTADOS OBTIDOS	50
	C – CÁLCULO DO MÓDULO TANGENTE.....	58

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - a) Foto de um cabo condutor CAA em corte; b) Figura esquemática de um cabo CAA (Fadel, 2010, modificado).	2
Figura 2 - Detalhe da montagem do grampo que fixa o cabo a torre (Fadel, 2010).....	2
Figura 3 - a) Desenho esquemático da carga gerada sobre o cabo condutor no grampo de suspensão; b) Vista em corte da montagem cabo condutor/ grampo de suspensão (Fadel, 2010, modificado).	3
Figura 4 - Regiões de contato (Fadel, 2010, modificado)	3
Figura 5 - Detalhe da camada interna do cabo, mostrando os amassamentos provocados pelo contato com a camada externa e a falha ocorrida nos fios (Fadel, 2010, modificado).....	4
Figura 6 - a) Representação esquemática das curvas tensão-deformação; b) carga-deslocamento e c) superfície deformada pela indentação, após descarregamento (Pulecio, 2010, modificado).	9
Figura 7 - Diagrama tensão-deformação obtido por meio de teste de tração padrão, a) Material dúctil; b) material frágil. (Budynas, 2010, modificado)	10
Figura 8 - (a) Cilindros em contato; (b) A tensão de contato ao longo do comprimento 2a.....	11
Figura 9 - Malha de elementos finitos para problema plano (Souza 2003).....	14
Figura 10 - Diferentes tipos de elementos finitos (Souza 2003)	15
Figura 11 - Graus de liberdade. a) graus de liberdade de um ponto; b) graus de liberdade de um corpo rígido. (Souza 2003).....	16
Figura 12 - Modelagem do problema. a) Contato entre cilindro e plano; b) Contato entre dois cilindros.....	19
Figura 13 - Elemento TARGE169. ANSYS Mechanical APDL Theory Reference (2011).....	20
Figura 14 - Elemento CONTA172. ANSYS Mechanical APDL Theory Reference (2011).....	21
Figura 15 - Cabo Grosbeak - ACSR 636 MCM - 26 fios de alumínio e 7 de aço (Henriques, 2006)	21
Figura 16 - Simulações realizadas. a) Cilindro em contato com superfície plana, ambos de alumínio; b) Cilindros em contato, ambos de alumínio; c) Cilindro de alumínio em contato com superfície plana de aço; d) Cilindro de alumínio em contato com cilindro de aço.	22

Figura 17 - a) Gráfico tensão-deformação; b) Aproximação bilinear do comportamento elasto-plástico.	23
Figura 18 - Comportamento bilinear elasto-plástico do alumínio 1350-H19.....	24
Figura 19 - Comportamento bilinear elasto-plástico do aço da alma do cabo	24
Figura 20 - Elemento PLANE183. ANSYS <i>Mechanical APDL Theory Reference</i> (2011)	25
Figura 21 - Detalhamento da região de refinamento da malha	26
Figura 22 - Malha produzida na modelagem e detalhamento do refinamento	26
Figura 23 - Distribuição de tensão na direção x. a) Contato entre cilindros de alumínio; b) Contato entre cilindros de alumínio e outro de aço; c) Contato entre cilindro e plano de alumínio; d) Contato entre cilindro de alumínio e plano de aço.....	27
Figura 24 - Distribuição de tensão na direção y. a) Contato entre cilindros de alumínio; b) Contato entre cilindros de alumínio e outro de aço; c) Contato entre cilindro e plano de alumínio; d) Contato entre cilindro de alumínio e plano de aço.....	28
Figura 25 - Distribuição de tensão na direção z. a) Contato entre cilindros de alumínio; b) Contato entre cilindros de alumínio e outro de aço; c) Contato entre cilindro e plano de alumínio; d) Contato entre cilindro de alumínio e plano de aço.....	28
Figura 26 - Distribuição de tensão cisalhante máxima no plano xy. a) Contato entre cilindros de alumínio; b) Contato entre cilindros de alumínio e outro de aço; c) Contato entre cilindro e plano de alumínio; d) Contato entre cilindro de alumínio e plano de aço.	29
Figura 27 - Distribuição da tensão de Von Mises. a) Contato entre cilindros de alumínio; b) Contato entre cilindros de alumínio e outro de aço; c) Contato entre cilindro e plano de alumínio; d) Contato entre cilindro de alumínio e plano de aço.	30
Figura 28 - Gráfico da pressão na região de contato.....	31
Figura 29 - Gráfico de tensão σ_{xx}	31
Figura 30 - Gráfico da tensão σ_{yy}	32
Figura 31 - Gráfico da tensão σ_{zz}	32
Figura 32 - Gráfico da tensão cisalhante máxima no plano xy.	33
Figura 33 - Gráfico da pressão de contato entre cilindro e plano.....	34
Figura 34 - Tensões na direção x, com aumento de carga gradual.....	34
Figura 35 - Tensões na direção y, com aumento de carga gradual.....	35
Figura 36 -Tensões na direção z, com aumento de carga gradual.....	35

Figura 37 - Tensão cisalhante no plano xy, com aumento de carga gradual.....	36
Figura 38 - Tensão de Von Mises, com aumento de carga gradual.	36
Figura 39 - Tensão de Von Mises em função da carga aplicada para $y = 0$ e $y = 0,0132$ mm.....	37
Figura 40 - Tensões na direção x, com redução de carga gradual.....	37
Figura 41 - Tensões na direção y, com redução de carga gradual.....	38
Figura 42 - Tensões na direção z, com redução de carga gradual.....	38
Figura 43 - Tensão cisalhante no plano xy, com redução de carga gradual.....	39
Figura 44 - Tensão de Von Mises, com redução de carga gradual.....	39

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -Propriedades Mecânicas do Alumínio e Aço	22
--	----

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

a	Comprimento da superfície de contato	[mm]
E^*	Módulo de Elasticidade Modificado	[GPa]
E	Módulo de Elasticidade	[GPa]
p	Pressão de contato	[MPa]
P	Carga de compressão	[N]
R	Raio de curvatura da superfície	[N]
S_{ut}	Resistência de tração	[MPa]
S_y	Resistência ao escoamento	[MPa]
S_f	Resistência à fratura	[MPa]
ϵ_f	Alongamento na fratura	

Símbolos Gregos

ν	Coeficiente de Poisson	
σ	Tensão	[MPa]
τ	Tensão Cisalhante	[MPa]

Siglas

APDL	<i>ANSYS Parametric Design Language</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos

1 INTRODUÇÃO

A disponibilidade de energia é essencial para desenvolvimento de um país, é necessário atender a demanda existente assim como permitir o crescimento industrial e o número crescente de consumidores. As grandes fontes de produção de energia frequentemente se dispõem distantes da região de consumo e assim necessita ser transportada.

A importância da malha de transmissão de energia brasileira se torna evidente ao se considerar a extensão do território e os abundantes recursos de energia hidráulica distantes dos centros de consumo. A extensão total do sistema de transmissão de energia elétrica alcançou, em dezembro de 2012, a marca de 106,7 mil km, montante que inclui, além da rede Básica, 550 km relativos aos Sistemas Isolados e 3.224 km do Sistema de Conexão de Itaipu, em 600 kV. Do total, 45,1 mil km são na tensão de 230 kV, com expansão de 4% em 2012 e 33,4 mil km na tensão de 500 kV, com expansão de 2% em 2012. Considerando todas as tensões, o aumento foi de 2,7% em relação à malha existente em 2011, correspondente a 2.779 km. Com isso é fundamental um controle efetivo dos materiais que compõem o sistema de transmissão, de modo a garantir a confiabilidade necessária.

Os cabos utilizados nas linhas de transmissão se tornam o elemento de maior importância no transporte de energia elétrica, e exige uma manutenção preditiva e preventiva extremamente cuidadosa em vista dos enormes prejuízos que uma falha pode gerar. Portanto torna-se essencial a geração de mecanismos que promovam o controle de ocorrência de falhas.

O estudo da vida em fadiga de cabos condutores de energia elétrica é de extrema importância para o desenvolvimento de novas tecnologias que permitam uma transmissão mais segura e barata. O Grupo de Fadiga, Fratura e Materiais da Universidade de Brasília faz um estudo com cabos CAA (Cabos de Alumínio com Alma de Aço), que são constituídos por camadas de fios de alumínio externamente (condutor) e um núcleo de fios de aço (auxiliar de resistência), como mostrado na Figura 1.

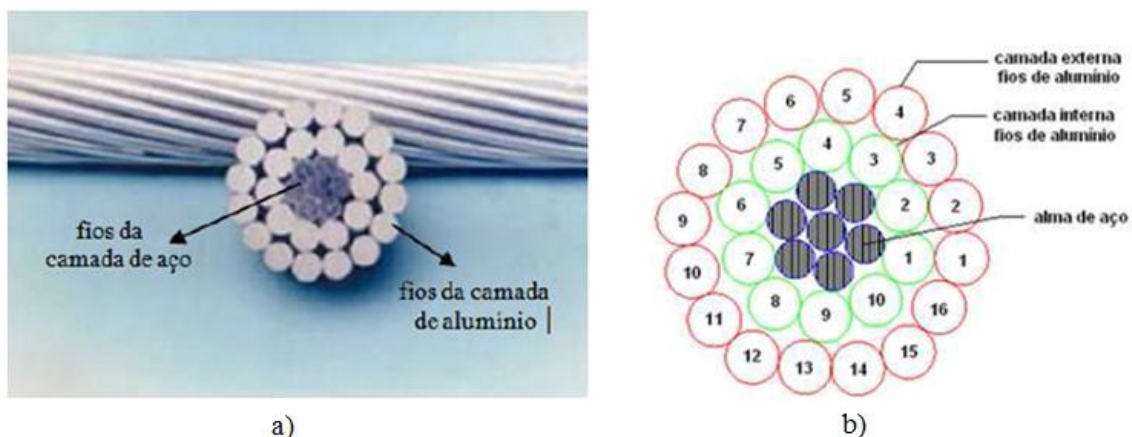


Figura 1 - a) Foto de um cabo condutor CAA em corte; b) Figura esquemática de um cabo CAA (Fadel, 2010, modificado).

A maior causa de falhas mecânicas em condutores aéreos é a fadiga provocada pela vibração induzida pela ação contínua do vento no cabo aéreo tensionado. A falha do condutor frequentemente ocorre nos pontos de fixação do cabo, como grampos de suspensão mostrados na figura 2.

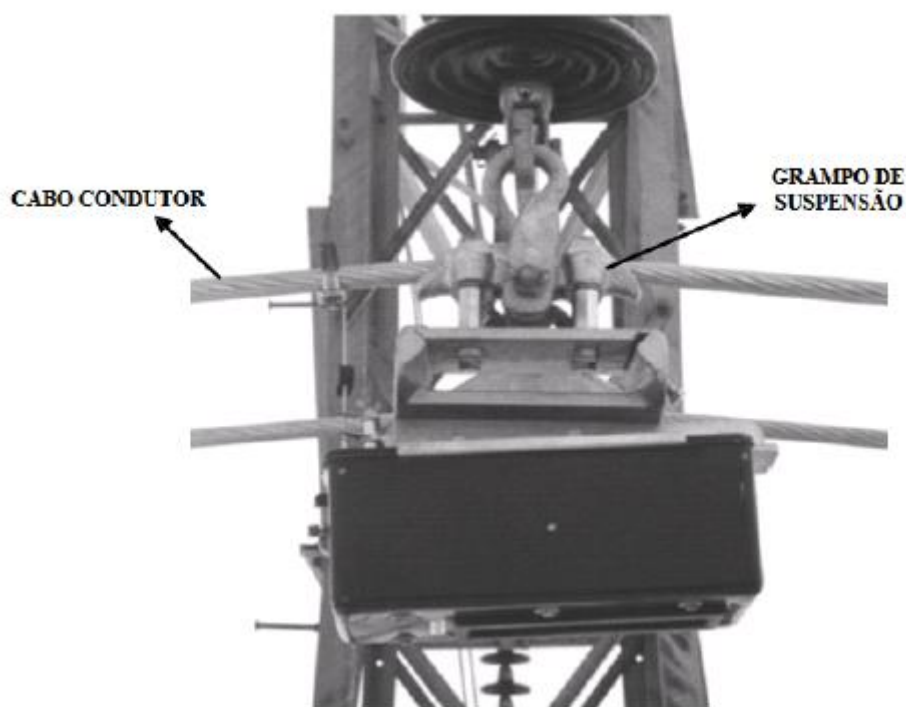


Figura 2 - Detalhe da montagem do grampo que fixa o cabo a torre (Fadel, 2010).

A falha do condutor é em grande parte causada pelo problema de contato que ocorre no interior dos grampos de suspensão e pode ser entendida a partir da compreensão da

configuração do condutor. O condutor é formado por um grupo de fios dispostos concentricamente em relação a um fio central, formando coroas compostas de fios torcidos, helicoidalmente, em direções opostas a cada camada. A figura 3 mostra de forma esquemática a tensão aplicada sobre o cabo no grampo de suspensão e a vista em corte da montagem do cabo/grampo.

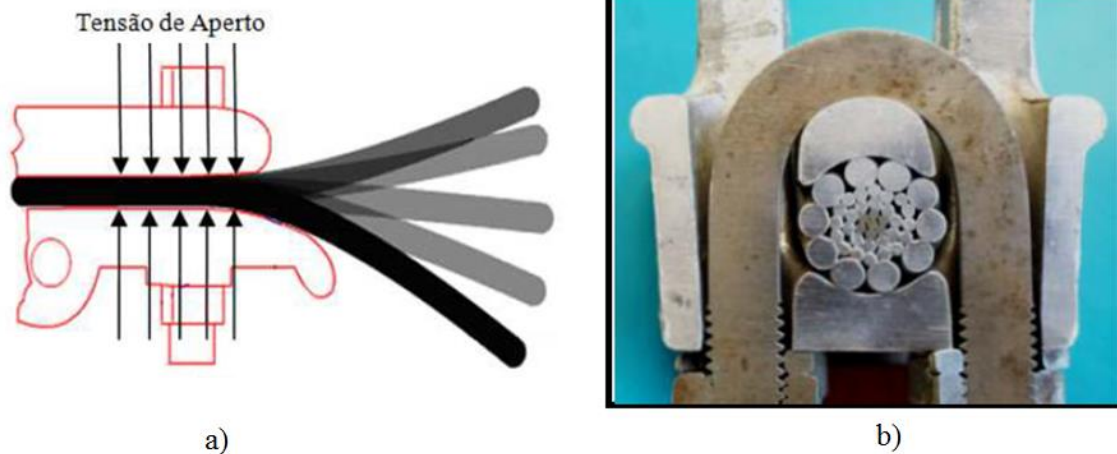


Figura 3 - a) Desenho esquemático da carga gerada sobre o cabo condutor no grampo de suspensão; b) Vista em corte da montagem cabo condutor/ grampo de suspensão (Fadel, 2010, modificado).

No interior do grampo, o cabo condutor estabelece uma série de regiões de contato, quer entre fios de alumínio internamente, quer entre os fios e as ferragens na camada mais externa do cabo. A figura 4 mostra de forma esquemática essas regiões.

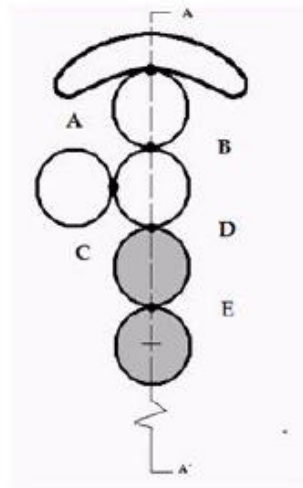


Figura 4 - Regiões de contato (Fadel, 2010, modificado)

Nos cabos do tipo CAA, dependendo das condições de carregamento, três diferentes modos de contato podem levar a falha por fadiga: i) o contato grampo/fio, na camada mais

externa do cabo (ponto A na figura 4) *ii*) o contato fio/fio, entre dois fios de alumínio (pontos B e C na figura 4) e, *iii*) o contato de fio de alumínio e fio de aço (ponto D da figura 4).

A força de aperto do grampo de sustentação promove o surgimento de endentações no contato entre a camada interna e externa destes. A endentação é o processo em que o limite de escoamento de um material é excedido pelo contato com a superfície de outro material, promovendo uma deformação irreversível e causando uma descontinuidade geométrica no corpo após a retirada da força. É justamente nesses locais que surgem e se propagam as trincas nos cabos, como mostrado na Figura 5.



Figura 5 - Detalhe da camada interna do cabo, mostrando os amassamentos provocados pelo contato com a camada externa e a falha ocorrida nos fios (Fadel, 2010, modificado)

O concentrador de tensões gerado nestes amassamentos, em conjunto com a carga cíclica à qual está submetido o cabo condutor, promove o surgimento das trincas no local do contato dos fios, levando ao rompimento do cabo por fadiga.

Para o estudo do comportamento do cabo em fadiga é necessário que se conheça o estado de tensão nos pontos mais solicitados do mesmo, onde ocorre o contato dos fios das camadas interna e externa, no interior do grampo de sustentação. Porém, a determinação analítica deste problema é muito complexa. Usualmente utiliza-se a equação de Poffemberger-Swart para estimar o estado de tensões na boca do grampo de sustentação, porém esta formulação permite apenas a estimativa para o cabo como um todo, não sendo capaz de mostrar a distribuição da pressão em cada um dos fios, não podendo levar à análise de onde ocorre o maior esforço e maior chance de se iniciar a trinca. Este trabalho visa criar uma metodologia para analisar numericamente o processo de endentação, permitindo a verificação da distribuição de pressões nas superfícies endentadas. Os resultados obtidos poderão ser utilizados futuramente para estimar de forma mais precisa a distribuição de tensão nas deformações formadas pelo contato entre os fios do cabo, através da aplicação de uma carga cíclica durante o contato.

1.1 OBJETIVO

Este trabalho tem como objetivo a criação e validação de um modelo para simulação numérica, por meio de elementos finitos, do processo de contato e endentação entre fios de cabos condutores de energia. O intuito é de que os resultados obtidos possam ser tomados com base para estudos mais aprofundados e assim permitir a estimativa mais precisa da distribuição das tensões nos pontos de contato dos fios de alumínio e entre fios de alumínio e fios de aço em cabos condutores.

O modelo se utilizará de um código em Linguagem Paramétrica de Projeto ANSYS (*ANSYS Parametric Design Language*). Para se definir de forma adequada o problema de contato no ANSYS, é necessário especificar uma série de parâmetros (rigidez de contato normal, limite de penetração, algoritmo de contato, entre outros) assim como as condições de contorno do problema. É importante conhecer a influência de cada parâmetro na análise de contato, gerando uma lista de recomendações, de modo a reduzir as situações de tentativa e erro. Assim, a solução de problemas de contato torna-se mais eficiente.

Os problemas que envolvem contato podem ser estudados analiticamente, numericamente ou experimentalmente. Porém, nem sempre o uso de soluções analíticas pode ser utilizado, na prática, são demasiadamente complexos para serem modelados por meio do uso de equações diferenciais, gerando a necessidade da utilização de aproximações. Isto já justifica a utilização de métodos numéricos, pois com o crescente avanço tecnológico, já se é capaz de descrever problemas complexos com o uso de computadores com um baixo custo e rapidez. Por fim, o uso do método experimental é usado para verificar na prática os resultados obtidos pelas aproximações numéricas, mas estão quase sempre associados a custos elevados. Para certas condições a utilização de elementos finitos facilita a obtenção dos resultados, e a qualidade da aproximação dos valores obtidos são condizentes com a realidade. O modelo obtido será validado através da comparação dos resultados obtidos com as soluções analíticas encontradas na literatura.

1.2 JUSTIFICATIVA

A confiabilidade dos processos de geração e transmissão de energia é estratégica para garantir ao país tanto a sustentabilidade do seu crescimento quanto a credibilidade necessária no que tange aos investimentos estrangeiros. A crescente demanda energética do país, a forma centralizada de geração de energia e a avançada idade média das linhas de transmissão forçam a necessidade de mecanismos que promovam o controle da ocorrência de falhas e possíveis blecautes. A ideia não é identificar se a falha irá ocorrer e sim quando irá. Portanto a

capacidade de previsão de falhas e o conhecimento de quais fatores a aceleram são essenciais para o projeto e manutenção das linhas de transmissão.

Os cabos condutores de energia são submetidos a esforços cíclicos provocados pelo vento em conjunto com esforços trativos, resultantes da condição de esticamento, e do aperto no grampo de sustentação que causam o aparecimento de trincas nos fios de alumínio e consequente rompimento dos mesmos. A verificação em campo da integridade dos cabos é um processo que se torna extremamente caro quando se considera o imenso território brasileiro e a quantidade de linhas. Assim a definição do melhor material ou carga de esticamento para os cabos é decisiva para economia das empresas e o barateamento da energia. Além disso, a capacidade de prever mais precisamente a vida em fadiga destes cabos pode diminuir a necessidade de verificação em campo da integridade, diminuindo também o custo de manutenção.

A força de aperto do grampo de sustentação promove o surgimento de endentações nas regiões de contato entre a camada interna e externa de fios. A endentação é o processo em que o limite de escoamento de um material é excedido pelo contato com a superfície de outro material, promovendo uma deformação irreversível e causando uma descontinuidade geométrica no corpo após a retirada da força. Para definir a vida dos cabos de forma mais precisa, é necessário que se conheça de forma mais profunda o comportamento do material. Uma análise por elementos finitos do processo de endentação pode gerar resultados com uma boa aproximação.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

O contato mecânico é um problema não-linear que apresenta certas dificuldades e uma das principais é a formulação de um modelo matemático que expresse adequadamente a distribuição de tensões e de deslocamentos, pois não se conhece previamente a região de contato. O método mais conhecido para tratar problemas não-lineares na área de mecânica estrutural, como o caso do contato, é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Nos programas comerciais de elementos finitos, além dos elementos finitos que constituem o corpo, empregam-se elementos especiais que são usados para definir a região de contato. Existem vários métodos para se estudar o problema de contato.

Para a realização deste projeto, inicialmente será realizada uma revisão bibliográfica, a fim de levantar o conhecimento necessário para o desenvolvimento das demais atividades do trabalho. Todos os conceitos utilizados serão apresentados nesta etapa do trabalho. Será utilizado um código para simulação, no programa Ansys, do contato entre um cilindro e uma superfície plana e entre dois cilindros iguais e entre cilindros de tamanhos diferentes. Os resultados serão comparados com os resultados analíticos obtidos por Hertz(1882).

Este trabalho está dividido em cinco capítulos. O primeiro apresenta uma introdução, contextualizando o tema estudado, evidenciando a justificativa para realização do trabalho, os objetivos propostos.

O segundo capítulo é dedicado a uma revisão da bibliografia acerca da Mecânica do Contato, utilização de elementos finitos na realização de problemas nessa área e uma apresentação sobre o programa ANSY e Linguagem APDL.

No terceiro capítulo é apresentado o método pelo qual será modelado o problema, apresentando informações importantes sobre as características geométricas e propriedades do material utilizado e o tipo de elemento e malha da simulação por elementos finitos.

O quarto capítulo se dedica à apresentação dos resultados obtidos, a comparação com a solução analítica para a verificação da validade do código e uma análise dos aspectos obtidos pelas simulações.

O quinto e último capítulo contém as conclusões do trabalho e as propostas para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 MECÂNICA DO CONTATO

As interações de contatos entre corpos representam uma classe de problemas da Mecânica dos Sólidos. As forças de ação e reação que surgem no contato entre os corpos causam alterações na condição de contorno, que geralmente no decorrer do processo de resolução possui comportamento não-linear. Essa não linearidade apresenta-se como a maior obstáculo a solução dos problemas.

De acordo com o resumo histórico apresentado por (Kikuchi, Oden, 1988), os problemas de atrito foram estudados séculos antes dos problemas de contato, estudados por Leonardo da Vinci no século XV, e foram abordados sempre entre sólidos considerados indeformáveis. Os problemas de contato na mecânica dos sólidos deformáveis só surgiram na literatura depois que vários conceitos da mecânica do contínuo foram estabelecidos. Em particular, os estudos de problemas de contato dentro da teoria de elasticidade foram iniciados

no século XIX, a partir de uma teoria envolvendo o impacto de corpos em colisão. Poisson foi o primeiro a estudar tais problemas, em seu trabalho ‘Trité de Mécanique’, porém segundo (Kikuchi, Oden, 1988), erros em seu trabalho geraram falhas na obtenção de respostas de problemas simples de corpos em colisão. Um trabalho posterior, também de êxito limitado, foi realizado por Saint-Venant e Voight, que tentaram formular uma teoria de impacto a partir da teoria de vibrações.

O trabalho que conseguiu adequadamente descrever o fenômeno é atribuído a Heinrich Hertz, que em 1882 apresentou um trabalho intitulado ‘On the Contact of Elastic Solids’, tal artigo é tido como marco inicial da Mecânica do Contato. Após Hertz a mecânica do contato teve como contribuinte o físico italiano Antonio Signorini, que em 1933 descreveu o problema geral de equilíbrio de um sólido elástico em contato sem atrito com um anteparo rígido. Em 1959 Signorini apresentou de forma mais completa a teoria sobre o mesmo assunto.

A partir do desenvolvimento da Teoria da plasticidade os problemas de contato tornaram-se mais genéricos e conseqüentemente mais complexos. A abordagem numérica, principalmente por meio do método dos elementos finitos, possibilitou analisar situações específicas de uma forma relativamente simples, acelerando a evolução da mecânica do contato, abrindo caminho para a Mecânica do Contato Computacional.

A Mecânica do Contato estuda situações em que dois corpos tendem a ocupar o mesmo local no espaço ao mesmo tempo, alternado as condições de contorno e gerando forças de ação e reação na superfície dos corpos. Quando estes são pressionados entre si, as superfícies respondem inicialmente de maneira elástica e, se a força for retirada, ocorre uma recuperação total da forma original. Com o aumento da força de compressão, as tensões ultrapassam o limite de escoamento do material e o corpo passa a se deformar de forma irreversível. No primeiro caso, a tensão no material é armazenada na forma de energia de deformação elástica e é recuperada completamente durante o processo de descarregamento. Já no segundo, quando ocorre a retirada da carga, a parcela elástica da deformação é recuperada, enquanto aquela que ocorre no regime plástico se mantém, gerando uma descontinuidade geométrica na superfície. Para um corpo em regime perfeitamente plástico, não há recuperação elástica após o descarregamento. A Figura 6 mostra contato de um indentador e um corpo nos diferentes regimes de deformação.

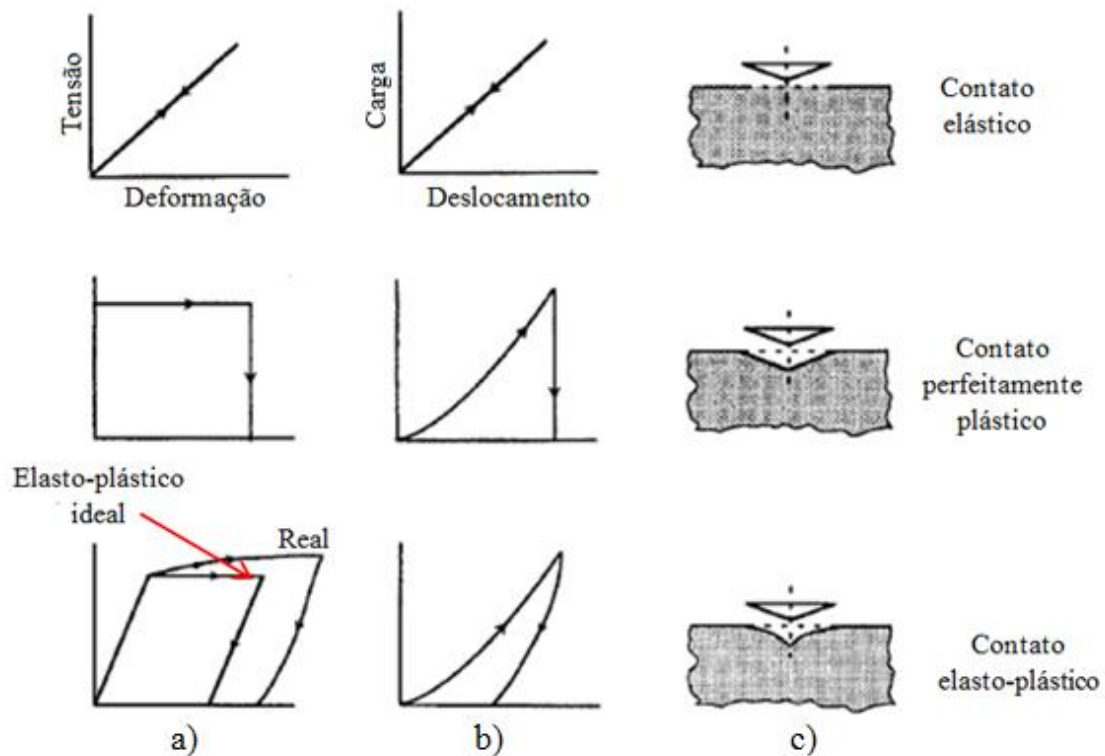


Figura 6 - a) Representação esquemática das curvas tensão-deformação; b) carga-deslocamento e c) superfície deformada pela indentação, após descarregamento (Pulecio, 2010, modificado).

Para a maioria dos materiais no regime elástico, a tensão σ aplicada é proporcional à deformação no corpo ϵ , obedecendo a uma relação linear. Tal relação é conhecida como Lei de Hooke representada pela equação (2.1), onde E é a constante de proporcionalidade denominada módulo de Young ou módulo de elasticidade, essa equação só se aplica durante a deformação elástica.

$$\sigma = E\epsilon \quad (2.1)$$

A Figura 4 apresenta um gráfico de Tensão x Deformação para o teste de tração padrão de um material. O ponto pl é denominado limite de proporcionalidade e esse é o ponto em que a curva começa, pela primeira vez, a desviar e deixar de ser uma linha reta. Nenhuma deformação permanente será observável no corpo se a carga for retirada nesse ponto. O ponto el denominado de limite de elasticidade que é o ponto além do qual se o corpo for carregado a deformação passa a ser plástica. A partir desse momento a deformação aumenta rapidamente sem aumento correspondente da tensão diz-se então que o material atinge o ponto de escoamento y . Nem todo material apresenta ponto de escoamento óbvio, especialmente para o

caso de materiais frágeis. Por esse motivo, muitas vezes a resistência ao escoamento S_y é definida por meio de um método de desvio, conforme mostra a figura 7, em que a reta ay é traçada com a inclinação E .

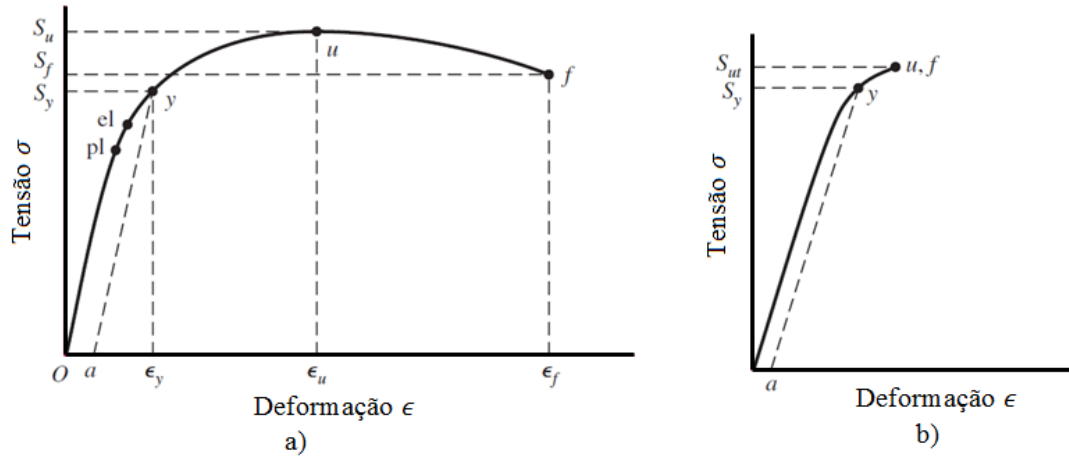


Figura 7 - Diagrama tensão-deformação obtido por meio de teste de tração padrão, a) Material dúctil; b) material frágil. (Budynas, 2010, modificado)

O ponto a corresponde a um nível definido ou declarado de deformação permanente, normalmente 0,2% do comprimento de referência original ($\epsilon = 0,002$), embora 0,01%, 0,1% e 0,5% sejam usados algumas vezes. A resistência última, ou de tração, S_u ou S_{ut} , corresponde ao ponto u na figura 4 e é a tensão máxima atingida no diagrama tensão-deformação.

2.2 O PROBLEMA DE CONTATO DE HERTZ

A teoria do contato de Hertz (1882) original é aplicável a superfícies sem atrito e a sólidos perfeitamente elásticos. A teoria apresenta hipóteses e condições sobre as dimensões e características da região de contato. A primeira hipótese é que a área gerada no contato assume forma elíptica. A segunda apresenta uma simplificação para o cálculo das deformações locais, tendo como objetivo que as tensões de contato sejam tratadas separadamente da distribuição de tensões do resto do sólido, para isso considera-se que a dimensão da área de contato seja pequena em comparação com as dimensões do corpo. A última hipótese é que não haja fricção e que apenas a pressão normal seja transmitida.

Dessa forma a teoria de Hertz(1882) prevê que quando uma carga normal P é aplicada sobre os cilindros gerando um contato, como mostrado na figura 5, uma distribuição de pressão elíptica é desenvolvida:

$$p(x) = \frac{2P}{\pi a^2} \sqrt{(a^2 - x^2)} \quad (2.2)$$

onde a é o tamanho da metade do comprimento da região de contato. O valor de a pode ser calculado pela equação (2.3) e visualizada na figura 1.

$$a = \sqrt{\frac{4RP}{\pi E^*}} \quad (2.3)$$

onde R é o raio de curvatura equivalente das superfícies e E^* o módulo de elasticidade modificado.

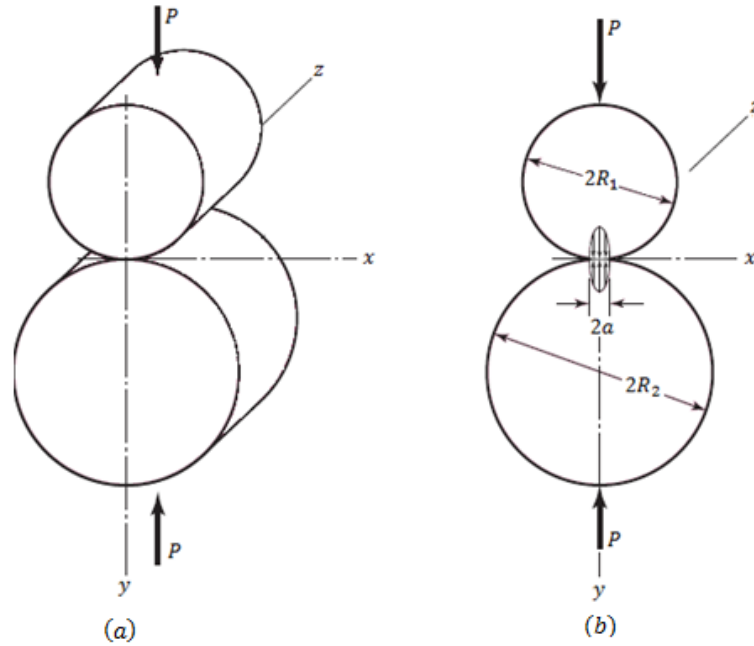


Figura 8 - (a) Cilindros em contato; (b) A tensão de contato ao longo do comprimento $2a$

Os valores de R e E^* são dados por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.4)$$

onde R_1 e R_2 são os raios de curvatura das superfícies dos sólidos em contato, e

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1}{E_1} + \frac{1 - \nu_2}{E_2} \quad (2.5)$$

Onde E_1 e E_2 são os módulos de Young de cada corpo, ν_1 e ν_2 os coeficientes de *poisson*. A pressão máxima no contato é dada por

$$p_0 = \frac{2P}{\pi a} = \sqrt{\left(\frac{PE^*}{\pi R}\right)} \quad (2.6)$$

Ao longo do eixo y as tensões até uma profundidade de 3a são dadas por

$$\sigma_x = -\frac{p_0}{a} \{(a^2 + 2y^2)(a^2 + y^2)^{-1/2} - 2y\} \quad (2.7)$$

$$\sigma_y = -p_0 \cdot a \cdot (a^2 + y^2)^{-1/2} \quad (2.8)$$

A terceira tensão depende do coeficiente de poisson

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.9)$$

2.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Equações diferenciais ordinárias (EDOs) e equações diferenciais parciais (EDPs) permitem expressar grande parte dos problemas de engenharia encontrados no dia-a-dia. Porém nem todos os problemas apresentam solução analítica. Nesses casos as soluções numéricas que se aproximam a solução se tornam necessárias, ficando o engenheiro responsável por analisar os resultados e verificar se as simplificações usadas e o erro associado não comprometem a solução do problema. O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste de vários métodos numéricos para aproximar a solução de problemas descritos por EDOs e EDPs e limitados por condições de contorno.

A primeira ideia de Método dos Elementos Finitos surgiu em 1909, quando Walter Ritz, desenvolveu um método para determinar a solução aproximada de problemas em mecânica dos sólidos deformáveis, onde o funcional energia era aproximado por funções conhecidas com coeficientes a serem determinados. Em 1943, Richard Courant introduziu funções lineares especiais definidas sobre regiões triangulares ao método de Ritz e aplicou o método na solução de problemas de torção. O método de Ritz, junto com as modificações de Courant, é similar ao MEF proposto por Ray William Clough Jr. muitos anos depois. Coube a Clough (1960) introduzir, pela primeira vez, o termo elemento finito no artigo *'The finite element method in plane stress analysis'*.

Se, inicialmente, o MEF fora desenvolvido como um método de simulação baseado em computação para análise de estruturas aeroespaciais, no final dos anos 60 passou a ser utilizado para a simulação de problemas não estruturais em fluidos, termomecânica e eletromagnetismo. Embora o método tenha sido extensivamente usado previamente no campo das estruturas mecânicas, hoje tem sido aplicada satisfatoriamente como uma técnica conveniente e bem

estabilizada para a solução computacional de problemas complexos em diferentes campos da engenharia: civil, mecânica, nuclear, biomédica, hidrodinâmica, condução de calor, geomecânica, entre outros. Por outro lado, MEF pode ser visto como poderosa ferramenta para a solução aproximada de equações diferenciais descrevendo diferentes processos físicos. Atualmente, existem vários programas comerciais bastante completos que permitem aplicar o MEF à análise de diferentes tipos de situações físicas: COSMOS, NASTRAN, ASKA, SAP, TITUS, MARC, ABACUS, ANSYS, ADINA, entre outros. Há ainda programas não comerciais desenvolvidos por universidades, como o MODULEF, por exemplo.

Em geral, problemas de engenharia são modelos matemáticos de situações físicas. Modelos matemáticos são equações diferenciais com condições de contorno e parâmetros iniciais definidos. Essas equações diferenciais são resultado de se aplicar Leis fundamentais ou Princípios da Natureza para sistemas ou volumes de controle e, dessa forma, representam um balanço de massa, força e energia da estrutura em estudo.

As soluções exatas para essas equações possuem duas partes: uma parte homogênea e uma parte particular. Para se definir a solução da parte homogênea, são usados parâmetros do comportamento natural do sistema em questão e propriedades como o módulo de elasticidade, condutividade térmica, condutividade viscosa, etc. Em suma, são as propriedades físicas que definem esse comportamento natural. Quanto à parte particular da solução das equações diferenciais, cabe os parâmetros de distúrbio do sistema. Esses parâmetros podem ser expressos por forças externas, momentos, diferença de temperatura, diferença de pressão, etc. Assim, esses parâmetros compõem as matrizes que definem as equações diferenciais: os parâmetros de comportamento do sistema representam, por exemplo, as matrizes de condutibilidade e rigidez; enquanto os parâmetros de distúrbio geram a matriz de carregamento.

Existem duas formas de resolução de problemas que envolvem EDOs e EDPs através da aplicação do MEF. A primeira forma, conhecida como forma forte, ou clássica, consiste na resolução direta das equações que governam o problema físico e suas condições de contorno. Para essa forma utiliza-se separação de variáveis, transformada de Laplace, etc. Porém há poucos casos na engenharia que se pode utilizar a forma forte, uma vez que ela é aplicável apenas em problemas contínuos.

A segunda, forma fraca ou variacional, utiliza uma formulação integral das equações que governam o problema físico. Na engenharia mecânica a forma fraca também é conhecida como princípio do trabalho virtual. É possível demonstrar, Hughes (1987), que essas formas são equivalentes e admitem uma solução única. A vantagem dessa forma é o fato de ela ser capaz de solucionar problemas não contínuos. A resolução da forma variacional pode ser obtida através

de métodos de aproximação como método de Garlekin, método dos mínimos quadrados e o método da colocação.

A ideia principal do Método dos Elementos Finitos consiste em se dividir o domínio (meio contínuo) do problema em sub-regiões de geometria simples (formato triangular, quadrilateral, cúbico, etc.), conforme ilustra esquematicamente a Figura 9. Esta ideia é bastante utilizada na engenharia, onde usualmente tenta-se resolver um problema complexo, subdividindo-o em uma série de problemas mais simples. Logo, trata-se de um procedimento intuitivo para os engenheiros.

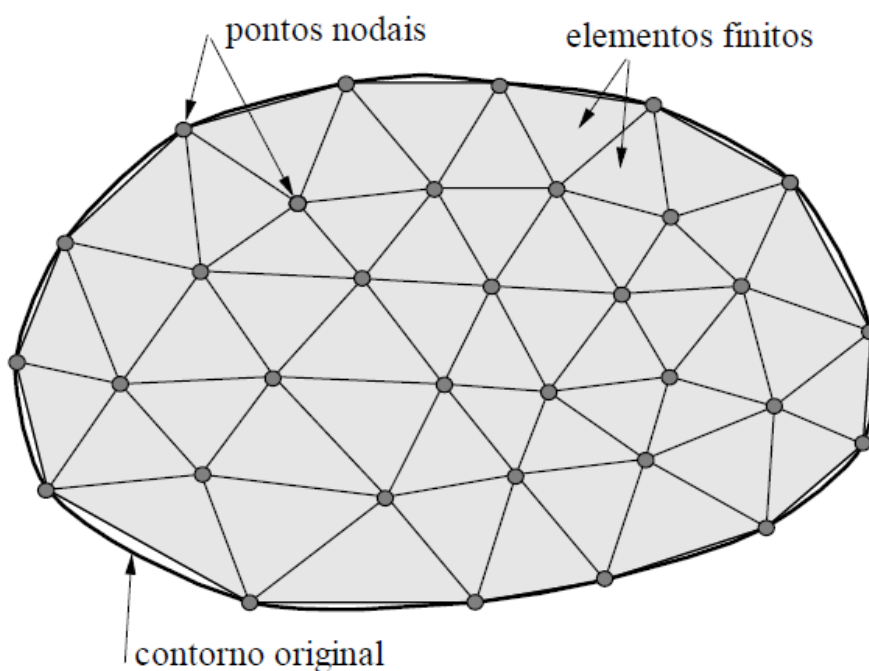


Figura 9 - Malha de elementos finitos para problema plano (Souza 2003)

Devido ao fato das sub-regiões apresentarem dimensões finitas, estas sub-regiões são chamadas “elementos finitos”, em contraste com os elementos infinitesimais utilizados no cálculo diferencial e integral.

Os elementos finitos utilizados na discretização (subdivisão) do domínio do problema são conectados entre si através de determinados pontos, denominados nós ou pontos nodais, conforme indica a Figura 9. Ao conjunto de elementos finitos e pontos nodais, dá-se, usualmente o nome de malha de elementos finitos.

Diversos tipos de elementos finitos já foram desenvolvidos. Estes apresentam formas geométricas diversas (por exemplo, triangular, quadrilateral, cúbico, etc) em função do tipo e da dimensão do problema (se uni, bi, ou tridimensional). A Figura 10 apresenta a geometria de vários tipos de elementos finitos.

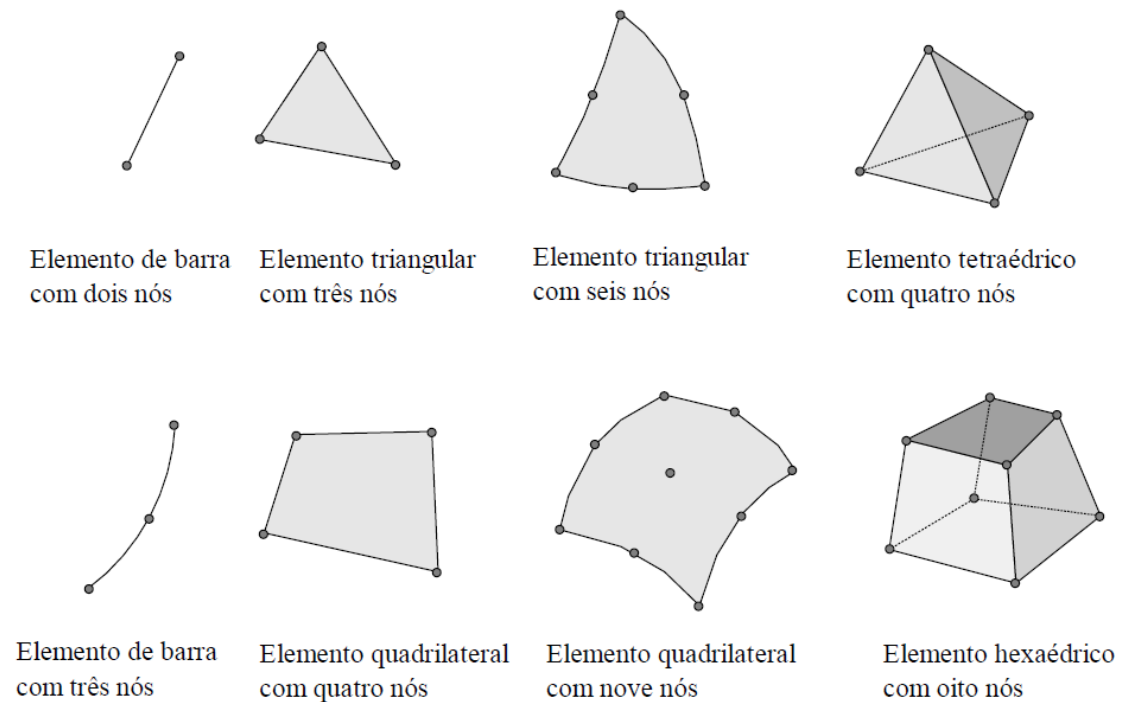


Figura 10 - Diferentes tipos de elementos finitos (Souza 2003)

A precisão do método depende da quantidade de nós e elementos, e do tamanho e tipo dos elementos presentes na malha. Um dos aspectos mais importantes do MEF diz respeito a sua convergência. Embora se trate de um método aproximado, pode-se demonstrar que em uma malha consistente, à medida que o tamanho dos elementos finitos tende a zero, e consequentemente, a quantidade de nós tende a infinito, a solução obtida converge para a solução exata do problema.

Ou seja, quanto menor for o tamanho e maior for o número de elementos em uma determinada malha, mais precisos serão os resultados da análise. O número de áreas de aplicação para o MEF tem crescido de forma considerável recentemente. Dentre os inúmeros campos de aplicação possíveis, podem se citar: Indústria da Construção Civil; Indústria automobilística, naval, aeronáutica e aeroespacial; Metalurgia; Mineração; Exploração de petróleo; Setor energético; Telecomunicações; Forças Armadas; Meio ambiente; Recursos Hídricos; Saúde. As primeiras aplicações do MEF foram em problemas de engenharia estrutural, mais especificamente, sobre análise de tensões. Neste tipo de problema, busca-se determinar as tensões, deformações e deslocamentos em um corpo sólido sujeito a determinadas ações tais como cargas (forças aplicadas) e recalques (deslocamentos impostos). Exemplos de tais aplicações compreendem o estudo do comportamento de estruturas civis, tais como edifícios, pontes, barragens, e túneis, onde os elementos finitos são utilizados na discretização de vigas, lajes, treliças, paredes, fundações, etc.

O estudo de análise de tensões também é importante em outras áreas da engenharia, tais como engenharia mecânica, naval, aeronáutica, aeroespacial, onde são necessários análises das estruturas e peças mecânicas de máquinas, automóveis, caminhões, navios, aviões, espaçonaves, etc. Dentro da área de mecânica dos sólidos, podem ser realizadas: análise estática, análise modal (problemas de auto valor e auto-vetor, para estudo de vibrações e instabilidade estrutural), e análise dinâmica.

Além dos conceitos de “elementos finitos” e “nós” no MEF, outro conceito muito importante refere-se ao conceito de “grau de liberdade” (*degree of freedom*) ou, “gdl” (*dof*). A ideia de grau de liberdade tem sua origem na ideia do movimento de partículas em problemas da Mecânica, onde se considera que, conforme ilustra a Figura 11

- Um ponto apresenta, no espaço tridimensional, três graus de liberdade, quais sejam três possíveis movimentos de translação.
- Mais genericamente, um corpo rígido apresenta, no espaço tridimensional, seis graus de liberdade, três possíveis movimentos de translação e três possíveis movimentos de rotação.

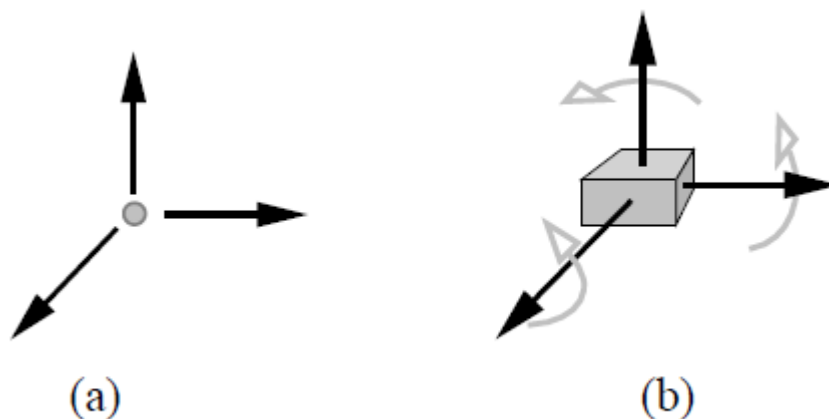


Figura 11 - Graus de liberdade. a) graus de liberdade de um ponto; b) graus de liberdade de um corpo rígido. (Souza 2003)

O comportamento de um elemento é praticamente definido pelo número e posicionamento dos nós, e pelo número de graus de liberdade (gdl) por nó. O mesmo elemento finito (com a mesma forma e mesmo número de nós), como por exemplo, o elemento triangular de três nós pode ser utilizado com diferentes graus de liberdade, dependendo da dimensão e tipo do problema em questão.

Em problemas de mecânica dos sólidos (análise de tensões), os graus de liberdade dos nós correspondem aos possíveis movimentos que estes podem sofrer. Por exemplo, o problema de análise de tensões em um meio tridimensional apresenta três graus de

liberdade por nó (três translações). No caso plano, existem dois graus de liberdade por nó (duas translações).

Estes movimentos ou deslocamentos dos nós são as incógnitas principais da análise pelo método tradicional de Elementos Finitos do problema geral da Mecânica dos sólidos.

Apesar de o MEF ser uma ferramenta poderosa para a utilização na engenharia, não se deve perder de vista que este é um método aproximado, o que faz com que traga em seu contexto, simplificações de um determinado modelo físico que poderão acarretar resultados incoerentes com a realidade. O conhecimento de prováveis fontes de incerteza inerentes a modelagem do MEF tais como: linearizações, imperfeições na representação geométrica dos domínios complexos, erros de natureza numérica, entre outros, bem como o domínio do problema físico em estudo e do próprio método pelo engenheiro, são de fundamental importância na validação e interpretação dos resultados obtidos, Rade (2006).

2.4 ANSYS E LINGUAGEM APDL

O ANSYS é um pacote comercial de elementos finitos para aplicações diversas que começou a ser desenvolvido na década de 70 pela ANSYS Inc. O programa mostra os resultados graficamente na tela permitindo identificação visual da geometria e resultados facilitando a interpretação do que está ocorrendo na peça ou conjunto. O aumento significativo da utilização destes tipos de programas na execução de análises se deve principalmente a crescente velocidade de processamento dos computadores nas ultimas décadas e a facilidade de acesso a estes pela sua redução de custo.

A análise dos problemas se divide em três etapas distintas, o pré-processamento, solução e pós-processamento. No pré-processamento se deve definir por exemplo: a geometria, tipo de análise, malha, propriedades dos materiais e condições de contorno. Na solução se deve definir o tipo de solução desejada (equações lineares ou não lineares) para se obter os deslocamentos nodais. No pós-processamento pode-se obter vários tipos de resultados, tais como, tensões, fluxo de calor, convergência, fatores de segurança, etc. O programa pode não realizar a análise por motivo de má formação dos elementos (devido geralmente a erros geométricos), informações insuficientes das condições de contorno ou falta de espaço no disco ou memória RAM.

O APDL (ANSYS Parametric Design Language) é uma linguagem de programação utilizada para automatizar funções comuns ou mesmo para construção de um modelo a partir de seus parâmetros ou variáveis. O APDL possibilita ainda a realização de uma série de outras funcionalidades, tais como: declaração de variáveis, execução de laços, decisões lógicas, repetição de comandos, além de operações com vetores e matrizes. Com isso a linguagem dinamiza a criação de modelos distintos devido à facilidade de se alterar os parâmetros no código fonte, poupa significativamente tempo dispendido em pré-processamento e facilita o estudo paramétrico dos modelos.

3 MÉTODO DE MODELAGEM

Problemas de contato são altamente não lineares e exigem recursos significativos do computador para resolver. Por isso é importante que se entenda a física do problema a fim de tornar o modelo o mais eficiente possível.

Problemas de contato apresentam duas grandes dificuldades. A primeira é que geralmente não se conhece as regiões de contato até que se execute o problema. Dependendo das cargas, materiais, condições de contorno, e outros fatores, as superfícies podem entrar e sair de contato uns com os outros de uma maneira muito imprevisível e abrupta. Em segundo lugar, a maioria dos problemas de contato precisa responder por fricção. Existem várias leis de atrito e modelos para escolher, e todos eles são não lineares. A resposta de atrito pode ser caótica, tornando convergência de difícil solução.

Problemas de contato caem em duas classes gerais: rígidas para flexível e flexível para flexível. Em problemas de contato rígidas para flexíveis, uma ou mais das superfícies de contato são tratados como rígida (isto é, tem uma rigidez muito mais elevada em relação ao corpo deformável em contato). Em geral, a qualquer momento, um material macio entra em contato com um material duro, o problema pode ser assumido como sendo rígida para flexível. Muitos problemas de conformação de metal se enquadram nesta categoria. A outra classe, flexível para flexível, é o tipo mais comum. Neste caso, os dois corpos (ou todos) são deformáveis em contato (isto é, possuem rigidez semelhantes). Um exemplo de um contato flexível para flexível é flanges aparafusadas.

Para modelar um problema de contato, primeiro deve se identificar as partes a serem analisadas para sua possível interação. Se a interação está em um ponto, o componente correspondente do seu modelo será um nó. Se a interação é de uma superfície, o correspondente componente do modelo é um elemento: ou uma viga, casca, ou elemento sólido. O modelo de elementos finitos reconhece pares possíveis de contato pela presença de elementos de contato

específicos. Estes elementos de contato são sobrepostos sobre as partes do modelo que estão sendo analisados para a interação. Dependendo do tipo de elementos de contato adotado na simulação essa interação é definida.

Para a modelagem do problema foi utilizado um algoritmo direto, que terá como entradas a geometria dos corpos e as propriedades dos materiais. Foi utilizado o programa Ansys, que permite simulações por elementos finitos, obtendo na saída informações do estado de tensões do corpo simulado.

3.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO E ELEMENTO DE CONTATO

A modelagem do problema será realizada para duas condições de contato, primeiramente o contato de um cilindro com um plano e a outra de contato entre cilindros. Para uma redução no tempo de processamento computacional do problema a geometria utilizada foi a de metade do cilindro, podendo ser visualizada na figura 12. Uma carga de intensidade P será aplicada ao corpo superior no sentido a comprimi-lo contra o corpo inferior. Como condição de contorno o movimento do corpo superior será restringido no eixo x e a rotação, permitindo apenas deslocamento vertical. A base do corpo inferior será engastada, restringindo a translação e rotação do mesmo.

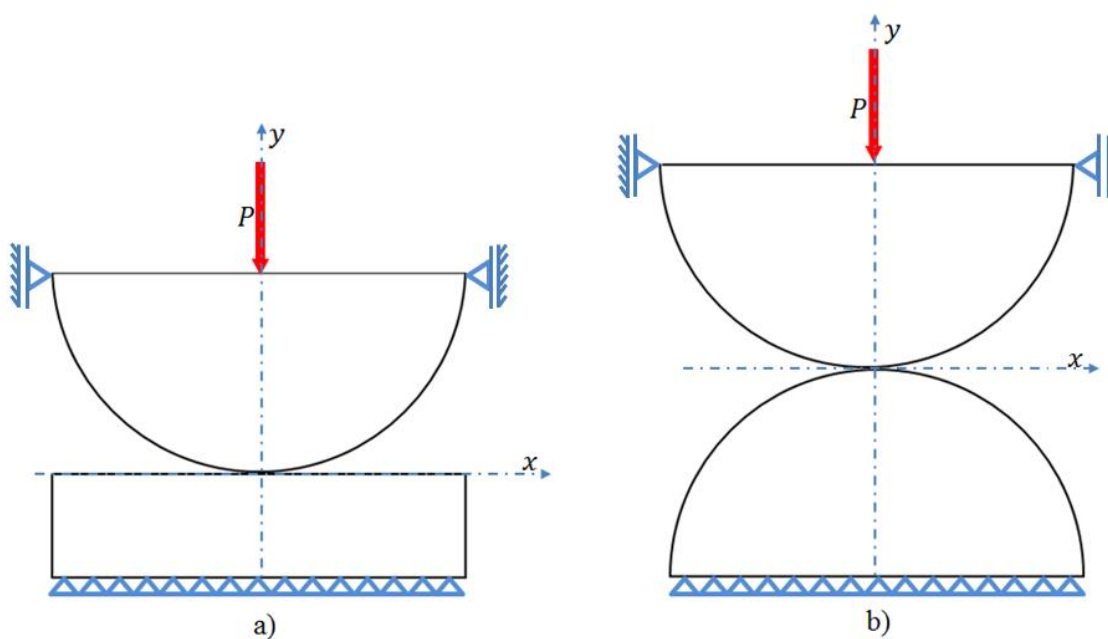


Figura 12 - Modelagem do problema. a) Contato entre cilindro e plano; b) Contato entre dois cilindros.

Para a primeira etapa da modelagem do problema será considerando somente deformações elásticas. A validação dessa primeira parte será a partir da comparação dos resultados produzidos pelo programa utilizado e os resultados analíticos obtidos por Hertz (1882) no trabalho intitulado 'On the Contact of Elastic Sólids'. Após essa etapa, o problema será analisado no regime elásto-plástico e será feita uma comparação com o regime elástico.

Para definir o contato foi utilizado o Método Lagrangiano Aumentado (Augmented Lagrangian Method). Ele foi utilizado por ser o método padrão no ANSYS, apresentar geralmente um melhor condicionamento, introduzir mais graus de liberdade e por ser menos sensível à magnitude da rigidez de contato. O método de Lagrangiano aumentado é uma série iterativa de métodos de penalização, as pressões de contato são aumentadas durante as iterações de equilíbrio de modo a que a penetração final é menor do que a tolerância permitida. No entanto, em algumas análises, o método Lagrangiano aumentada pode requerer iterações adicionais, especialmente se a malha torna-se demasiadamente deformada ou distorcida. Para modelagem do problema, que apresenta uma geometria relativamente simples, o método mostrou-se eficiente.

Para o contato foi usado o elemento do tipo TARGE169, ele é usado para representações diversas em 2D como superfície "alvo" para os elementos de contato associados (CONTA171 , CONTA172 ou CONTA175). Os elementos de contato sobrepõem os elementos do sólido que potencialmente entrarão em contato com a superfície do alvo. Pode-se impor qualquer translação ou deslocamento de rotação, temperatura, tensão e potencial magnético no elemento alvo assim como impor forças e momentos. O TARGE169 é composto por elementos de três pontos formando segmentos de parábolas, como mostrado na Figura 13.

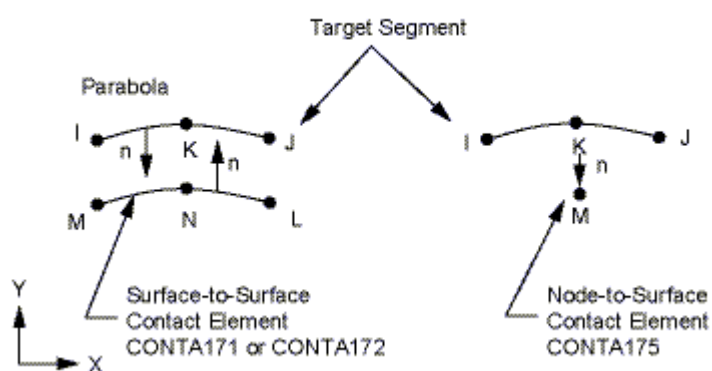


Figura 13 - Elemento TARGE169. ANSYS Mechanical APDL Theory Reference (2011)

Para completar a definição do contato utilizou-se o elemento CONTA172, figura 14, igualmente formado por três pontos, este elemento é utilizado para modelar a situação de contato entre uma superfície e o alvo definido. Esse par de elementos forma o modelo de contato superfície- superfície (Surface-to -Surface) que proporciona melhores resultados na análise de contatos em fins de engenharia típicos.

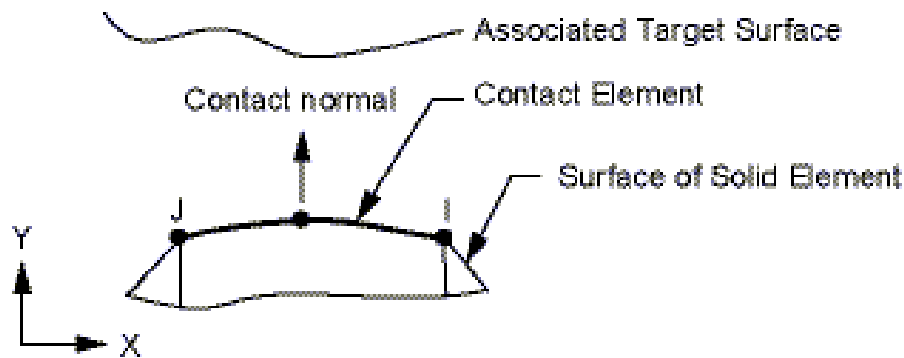


Figura 14 - Elemento CONTA172. ANSYS Mechanical APDL Theory Reference (2011)

3.2 GEOMETRIA E PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

A fim de se gerar resultados que caminhem para a realidade implementada na transmissão de energia por cabos de alumínio com alma de aço (CAA), valores de dimensões geométricas e propriedades dos materiais foram retiradas de um catálogo de fabricante de cabos para linhas de transmissão. O tipo de cabo tomado com referência foi o cabo Grosbeak que é de uso comum, ele é composto de 26 fios de alumínio enrolados em torno de uma alma de sete fios de aço. A figura 15 mostra esquematicamente a seção transversal do referido cabo.

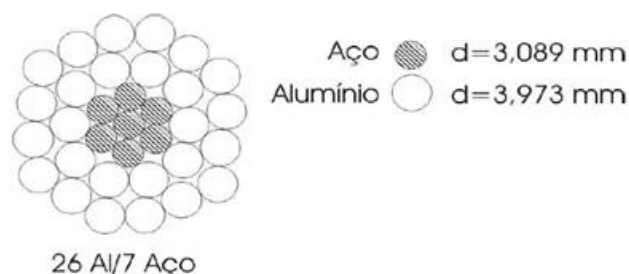


Figura 15 - Cabo Grosbeak - ACSR 636 MCM - 26 fios de alumínio e 7 de aço (Henriques, 2006)

A tabela 1 apresenta as propriedades mecânicas, necessárias para a simulação, da liga de alumínio 1350-H19 e do aço utilizado na alma.

Propriedades Mecânicas	Alumínio 1350-H19	Aço da alma
Módulo de Elasticidade (GPa)	68,9	200
Coefficiente de Poisson	0,33	0,29
Limite de Resistência a tração(Mpa)	186	1410
Tensão de escoamento (MPa)	165	1240
Porcentagem de alongamento (%)	1,5	4

Tabela 1 - Propriedades Mecânicas do Alumínio e Aço

Para a modelagem do problema foram realizadas simulações do contato entre as superfícies sendo ambas de alumínio e simulação entre uma superfície sendo de alumínio e outra de aço. A figura 16 mostra as simulações realizadas. Em todas as simulações foi considerado o estado plano de deformação.

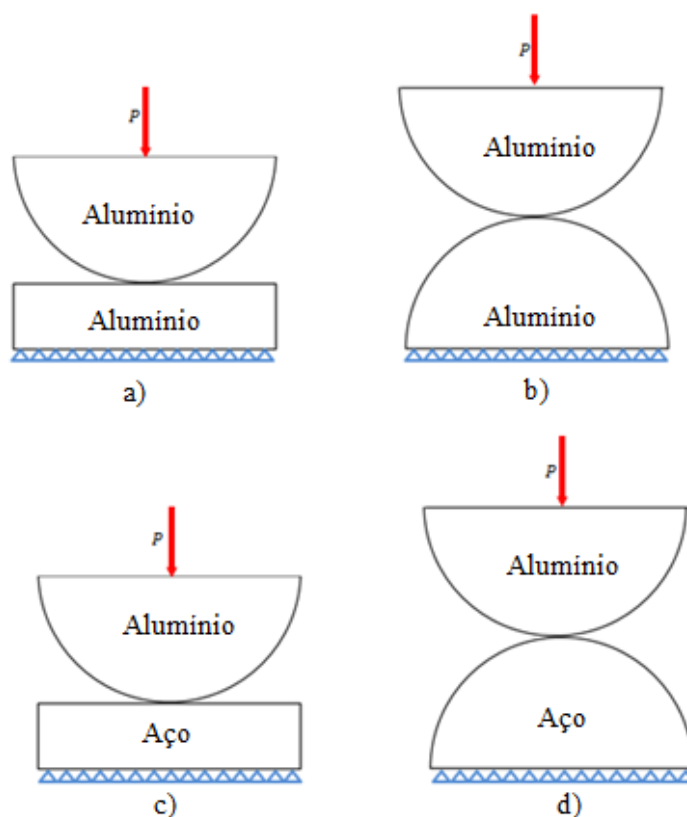


Figura 16 - Simulações realizadas. a) Cilindro em contato com superfície plana, ambos de alumínio; b) Cilindros em contato, ambos de alumínio; c) Cilindro de alumínio em contato com superfície plana de aço; d) Cilindro de alumínio em contato com cilindro de aço.

Para a inserção das propriedades plásticas do modelo no programa ANSYS foi utilizado o modelo bilinear com endurecimento isotrópico (no ANSYS pelo comando BISO). Nesse modelo faz-se uma aproximação linear do comportamento de deformação plástica, essa linearização pode ser observada na figura 17. Optou-se pela utilização deste modelo em relação ao de endurecimento cinemático (no ANSYS pelo comando BKIN), pois o segundo se aplica melhor para a simulação de condições de carga cíclica, o que não foi o caso estudado neste trabalho. Para as simulações futuras, quando forem aplicadas cargas cíclicas no contato entre os cabos, deverão ser feitos testes para verificar a aplicação do modelo de endurecimento cinemático.

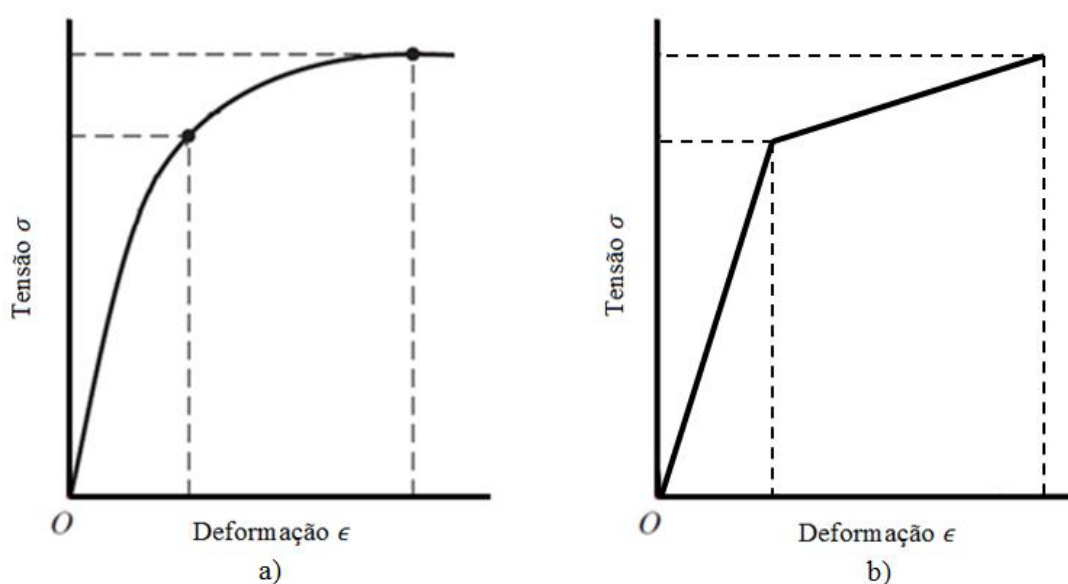


Figura 17 - a) Gráfico tensão-deformação; b) Aproximação bilinear do comportamento elasto-plástico.

Nesse modelo bilinear com endurecimento isotrópico o programa ANSYS necessita do módulo de elasticidade, do coeficiente de Poisson, da tensão de escoamento e do módulo tangente do material utilizado. Devido à dificuldade de se obter dados mais precisos do comportamento plástico dos materiais utilizados na modelagem, o valor do módulo tangente foi aproximado utilizando os dados de referencia mostrados na tabela 1 (módulo de elasticidade, limite de resistência à tração, tensão de escoamento e percentagem de alongamento). O cálculo realizado para essa aproximação está disposto no anexo C e as figura 18 e 19 mostram graficamente o comportamento elasto-plástico adotado para a modelagem do alumínio 1350-H19 e do aço.

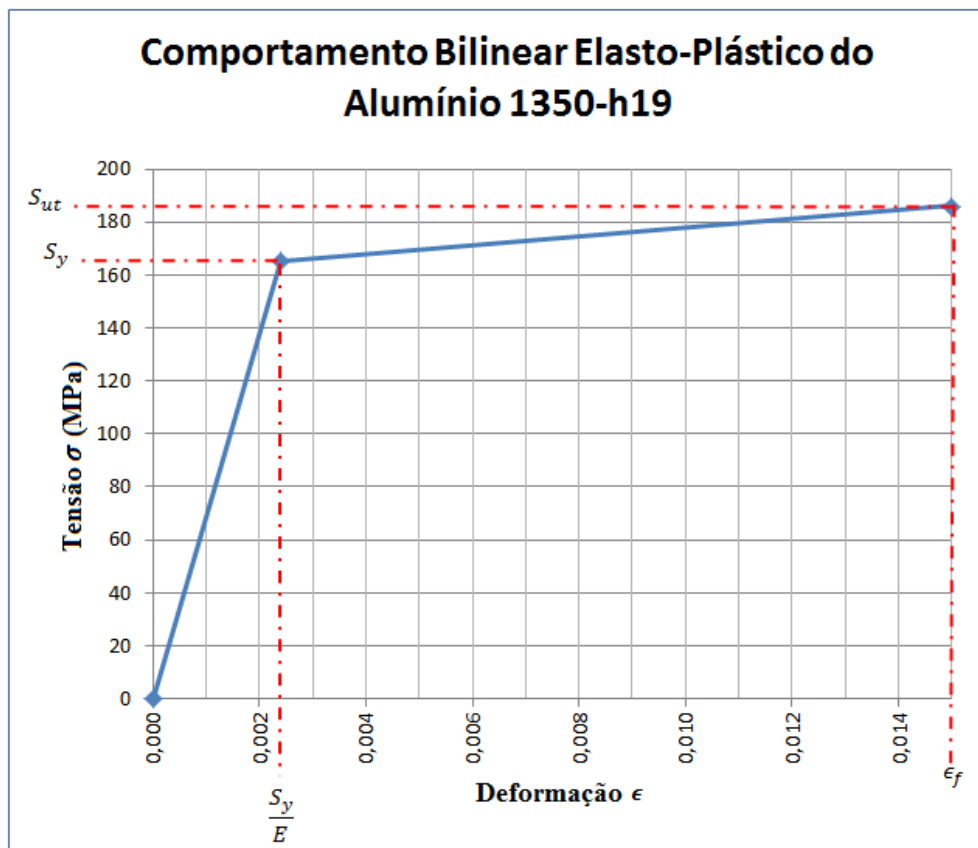


Figura 18 - Comportamento bilinear elasto-plástico do alumínio 1350-H19

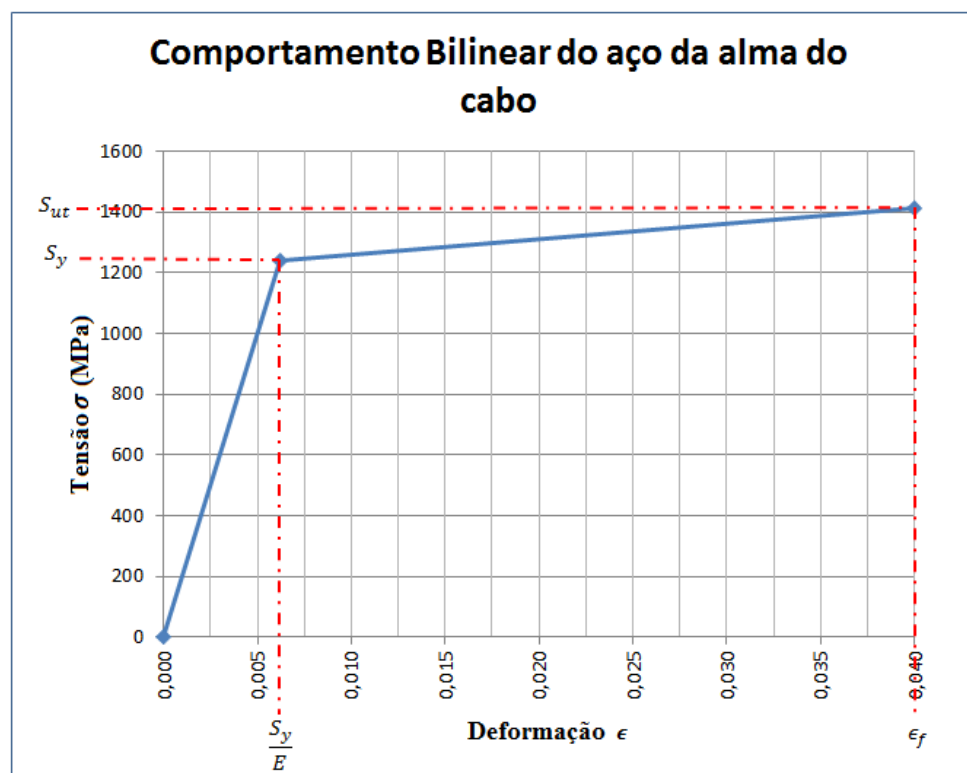


Figura 19 - Comportamento bilinear elasto-plástico do aço da alma do cabo

3.3 TIPO DE ELEMENTO E MALHA

Para a modelagem em duas dimensões foi utilizado o elemento PLANE183 tanto para o corpo superior como para o inferior. Esse elemento tem comportamento de deslocamento quadrático e é bem adequado para a modelagem de malhas irregulares. O elemento é estrutural, sólido e composto por quatro lados com oito nós ou três lados e seis nós (define-se o mesmo número de nó para os pontos K, L e O (Figura 20)), e cada nó possui dois graus de liberdade. Para a modelagem foi utilizada elementos triangulares por se adaptarem a geometria do problema.

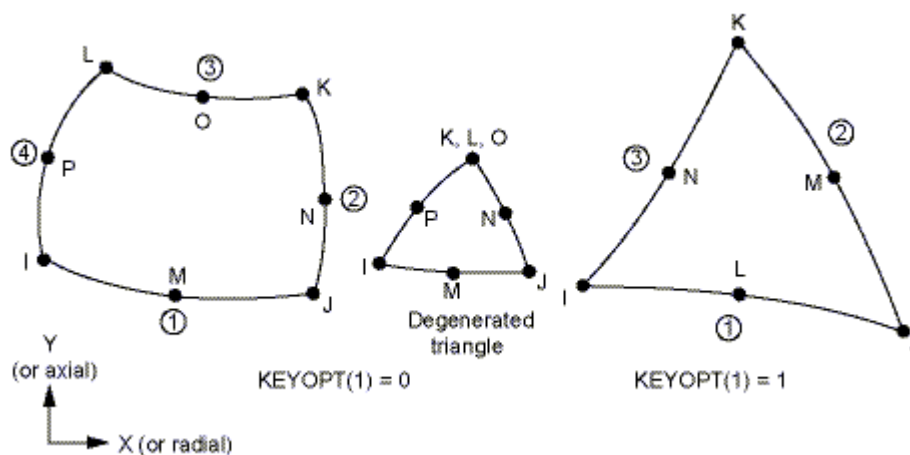


Figura 20 - Elemento PLANE183. ANSYS *Mechanical APDL Theory Reference* (2011)

Foi gerado um refinamento na malha dos corpos, pois na região próxima ao contato existe um maior gradiente de tensões e deslocamentos. Isso faz com que o tempo necessário de processamento seja reduzido sem prejudicar a precisão dos resultados. O tamanho da região de refinamento está em função do tamanho região de contato, foi utilizado para delimitar essa região linhas com comprimento de nove vezes o comprimento a (metade do comprimento da região de contato), como mostrado na figura 21 e figura 22. Cada uma dessas linhas apresenta 80 divisões geradas pelo comando LESIZE no ANSYS, para cada divisão é associado um elemento.

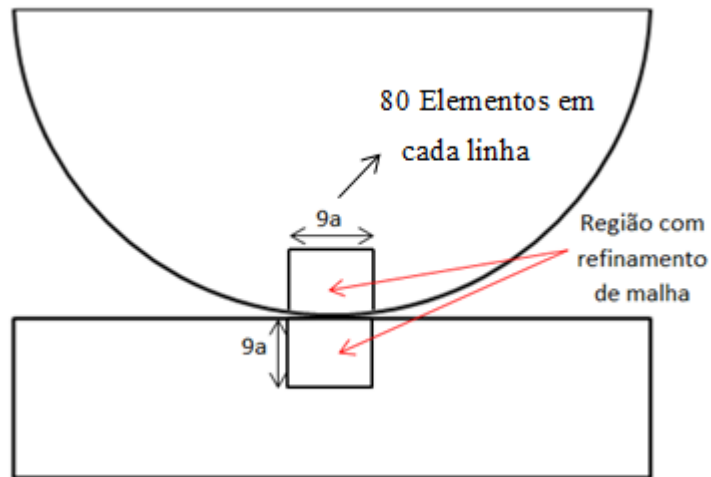


Figura 21 - Detalhamento da região de refinamento da malha

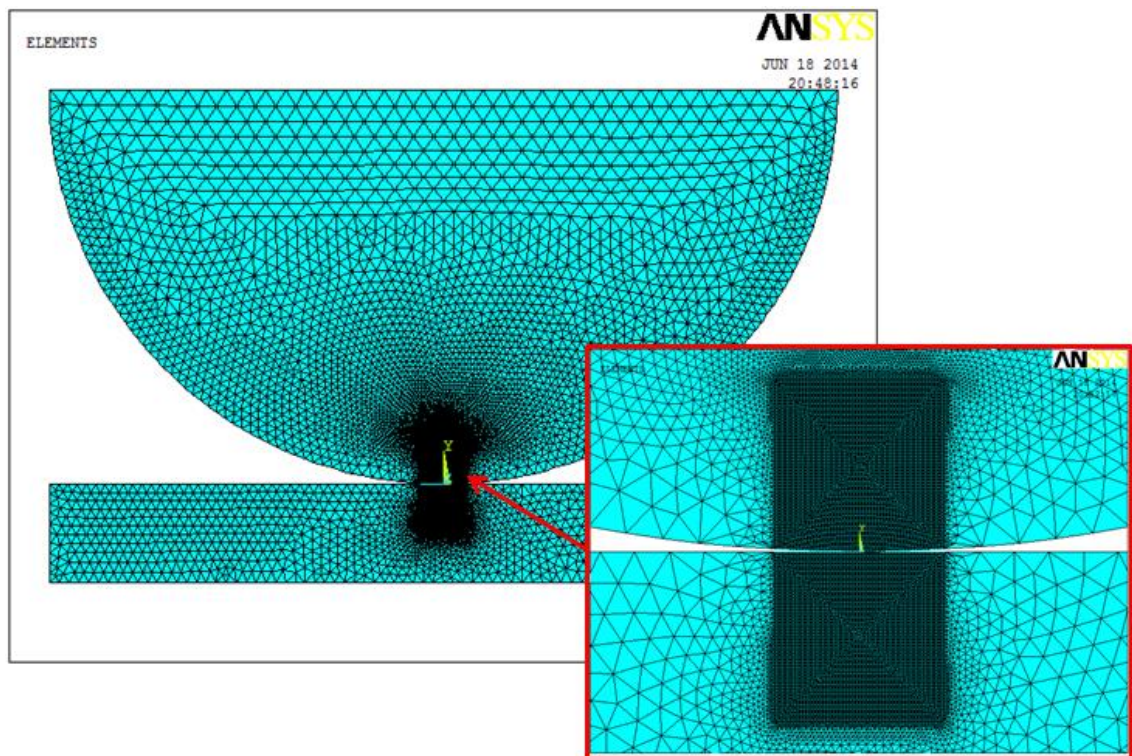


Figura 22 - Malha produzida na modelagem e detalhamento do refinamento

4 RESULTADOS

Os resultados aqui apresentados correspondem somente a um estudo inicial, resultados que fornecerão a base para estudos mais complexos da mecânica do contato. O pós-processamento das simulações foi focado na obtenção das tensões na proximidade do contato.

Basicamente, foram analisadas as tensões nas direções xyz, a tensão cisalhante máxima no plano xy e a tensão de Von Mises . As figuras de 23 a 27 correspondem à simulação do contato elástico entre cilindros e entre cilindro com plano para uma carga normal P . As imagens mostram as distribuições de tensão e tem o objetivo de fazer uma análise qualitativa comparativa entre as simulações realizadas.

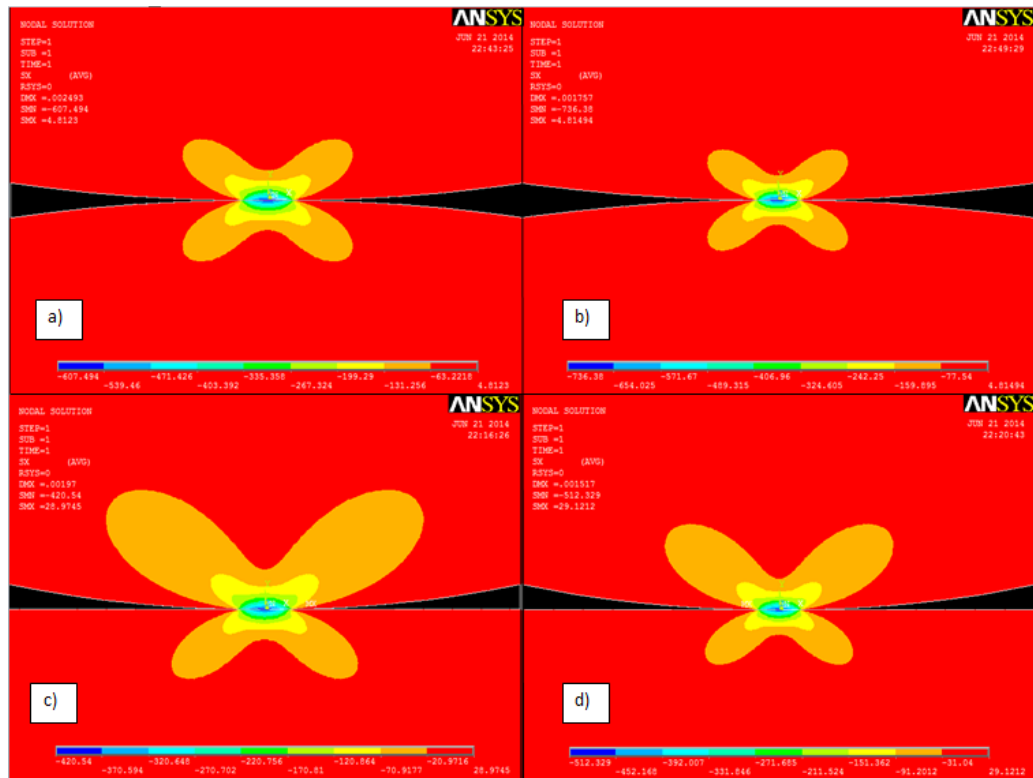


Figura 23 - Distribuição de tensão na direção x. a) Contato entre cilindros de alumínio; b) Contato entre cilindros de alumínio e outro de aço; c) Contato entre cilindro e plano de alumínio; d) Contato entre cilindro de alumínio e plano de aço.

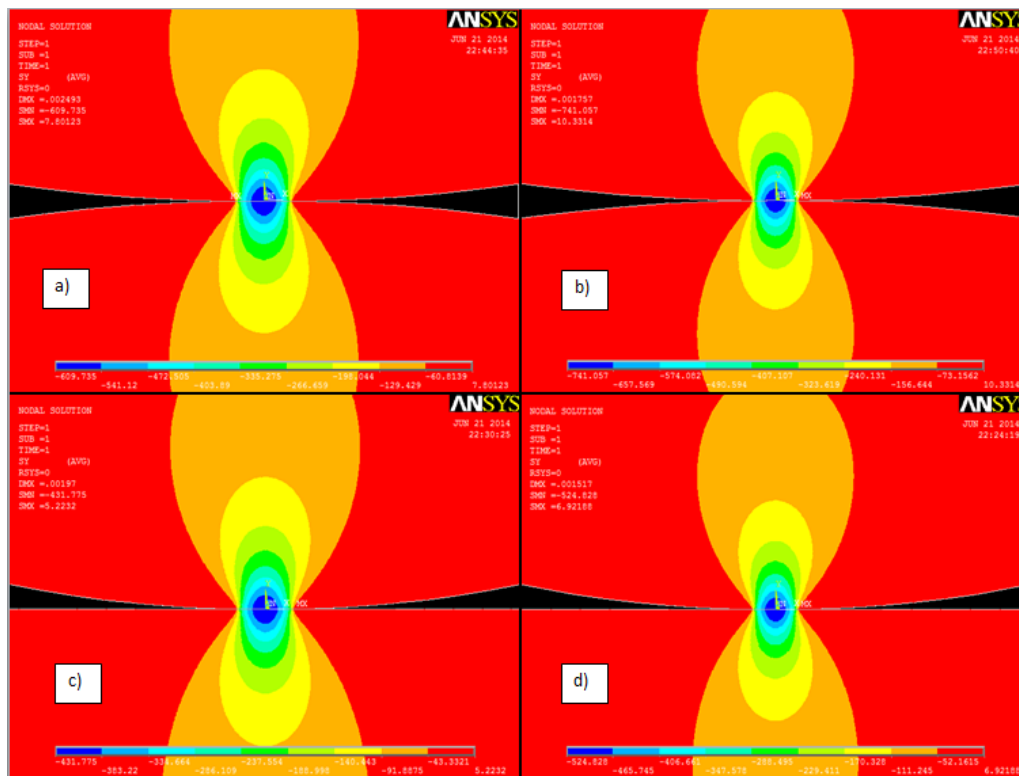


Figura 24 - Distribuição de tensão na direção y. a) Contato entre cilindros de alumínio; b) Contato entre cilindros de alumínio e outro de aço; c) Contato entre cilindro e plano de alumínio; d) Contato entre cilindro de alumínio e plano de aço.

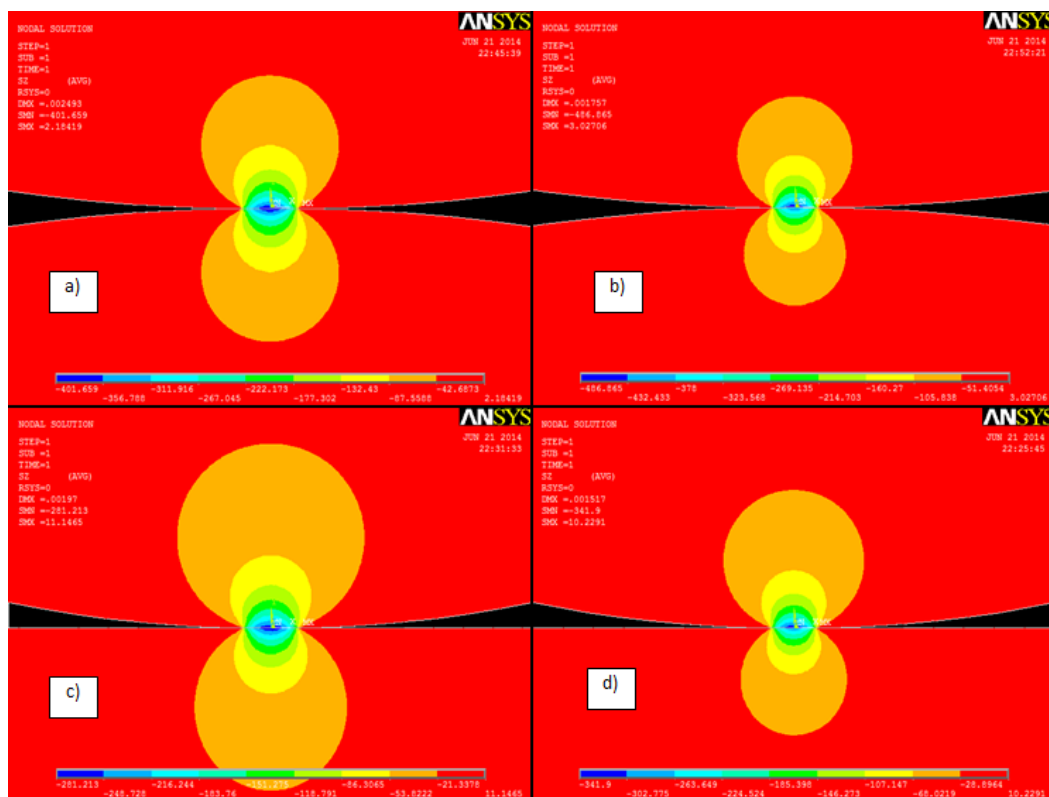


Figura 25 - Distribuição de tensão na direção z. a) Contato entre cilindros de alumínio; b) Contato entre cilindros de alumínio e outro de aço; c) Contato entre cilindro e plano de alumínio; d) Contato entre cilindro de alumínio e plano de aço.

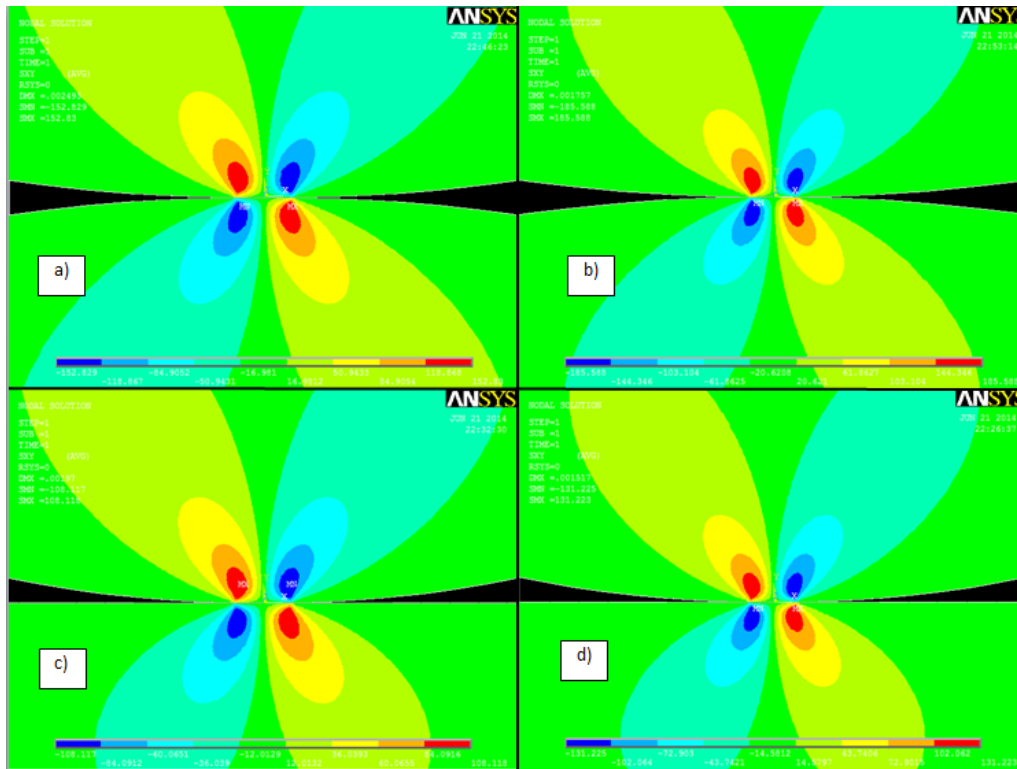


Figura 26 - Distribuição de tensão cisalhante máxima no plano xy. a) Contato entre cilindros de alumínio; b) Contato entre cilindros de alumínio e outro de aço; c) Contato entre cilindro e plano de alumínio; d) Contato entre cilindro de alumínio e plano de aço.

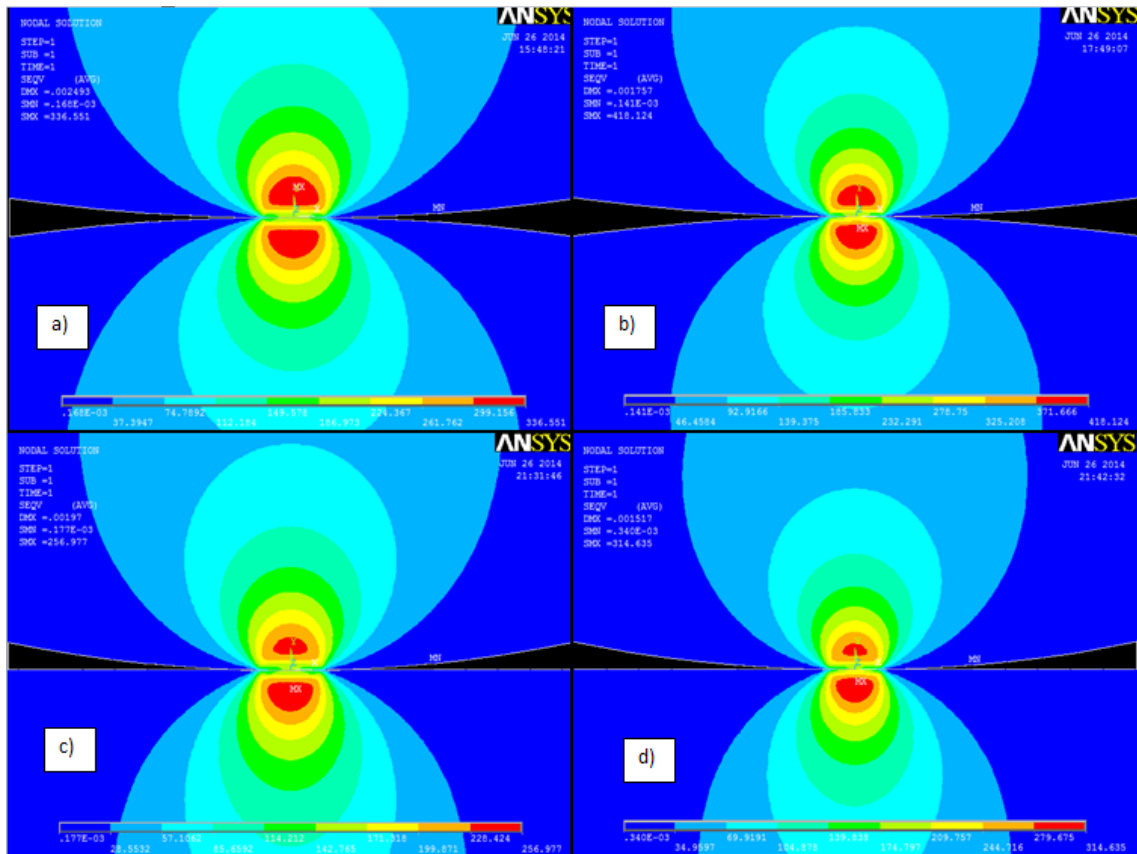


Figura 27 - Distribuição da tensão de Von Mises. a) Contato entre cilindros de alumínio; b) Contato entre cilindros de alumínio e outro de aço; c) Contato entre cilindro e plano de alumínio; d) Contato entre cilindro de alumínio e plano de aço.

4.1 ANÁLISE DA VALIDADE DO MODELO ELÁSTICO

Para validar o modelo elástico, como indicado na metodologia do trabalho, os resultados gerados pelo software serão comparados com as respostas analíticas do problema de contato de Hertz. Os resultados obtidos pelo software foram filtrados através do comando *Path*, escolhendo-se dois caminhos, um ao longo do eixo y e outro no eixo x na região de contato. Os valores obtidos foram comparados graficamente com as equações de tensões (2.7), (2.8) e (2.9) e foi gerado ainda um gráfico comparando o valor obtido pela distribuição de pressão na superfície de contato e a equação (2.2). O código de geração dos gráficos no MATLAB encontra-se nos ANEXO A. Os resultados das tensões obtidas na linha vertical que parte da origem e vai até três vezes o comprimento da superfície de contato a , foram divididos pela pressão máxima tornando os valores adimensionais.

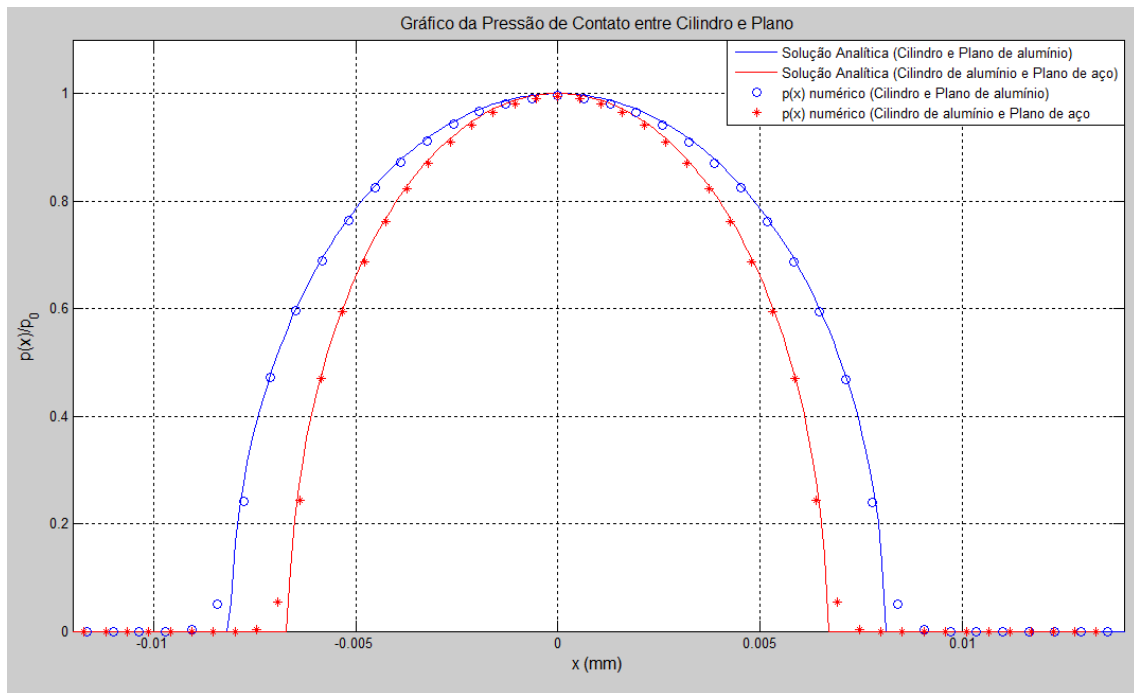


Figura 28 - Gráfico da pressão na região de contato.

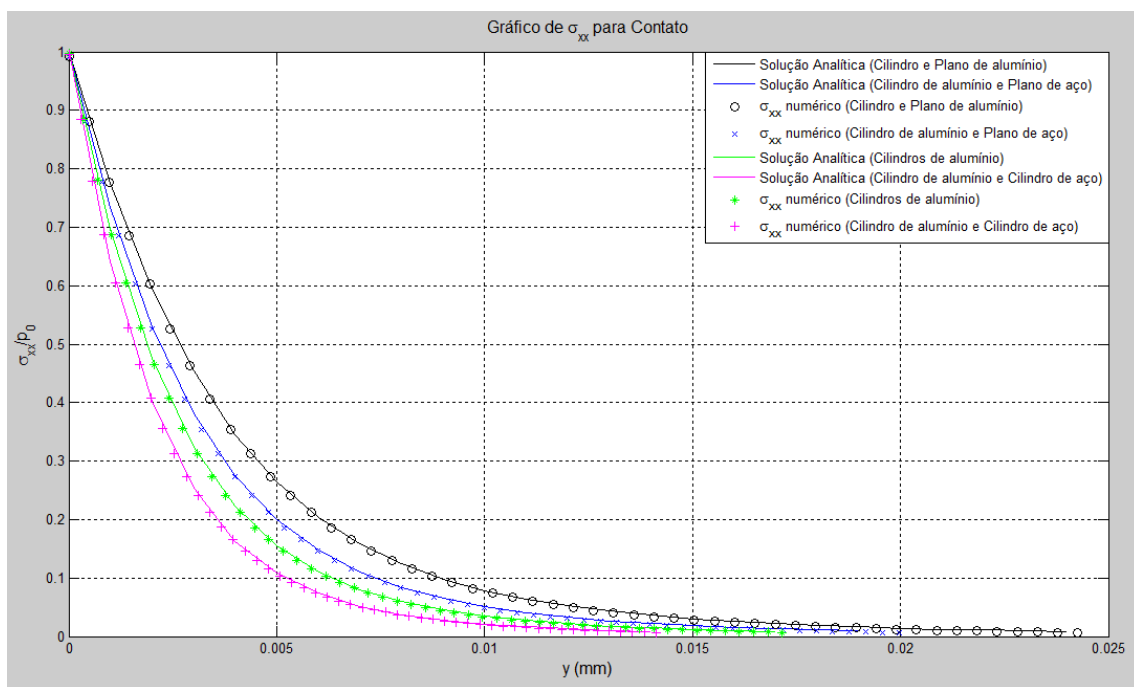


Figura 29 - Gráfico de tensão σ_{xx} .

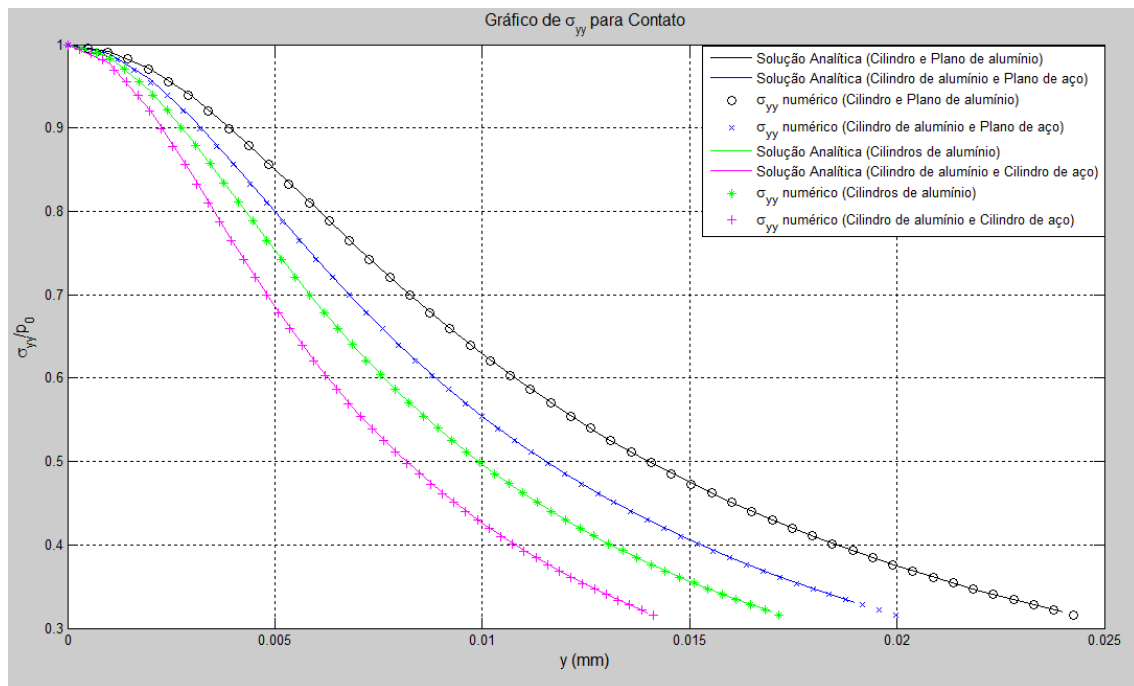


Figura 30 - Gráfico da tensão σ_{yy} .

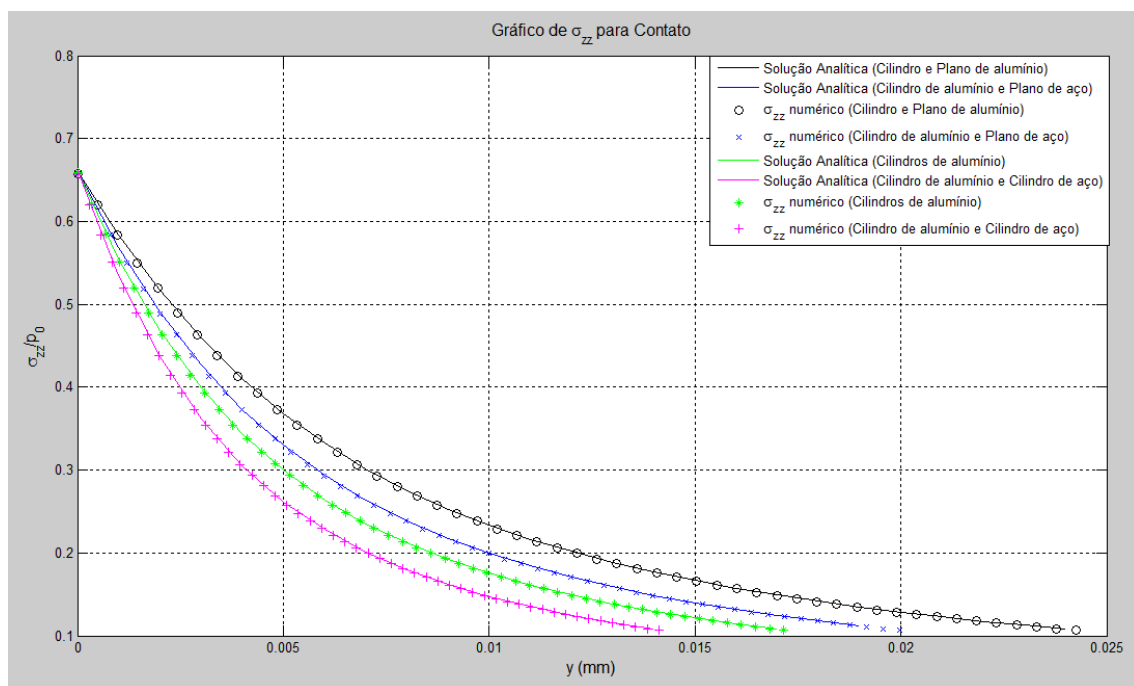


Figura 31 - Gráfico da tensão σ_{zz} .

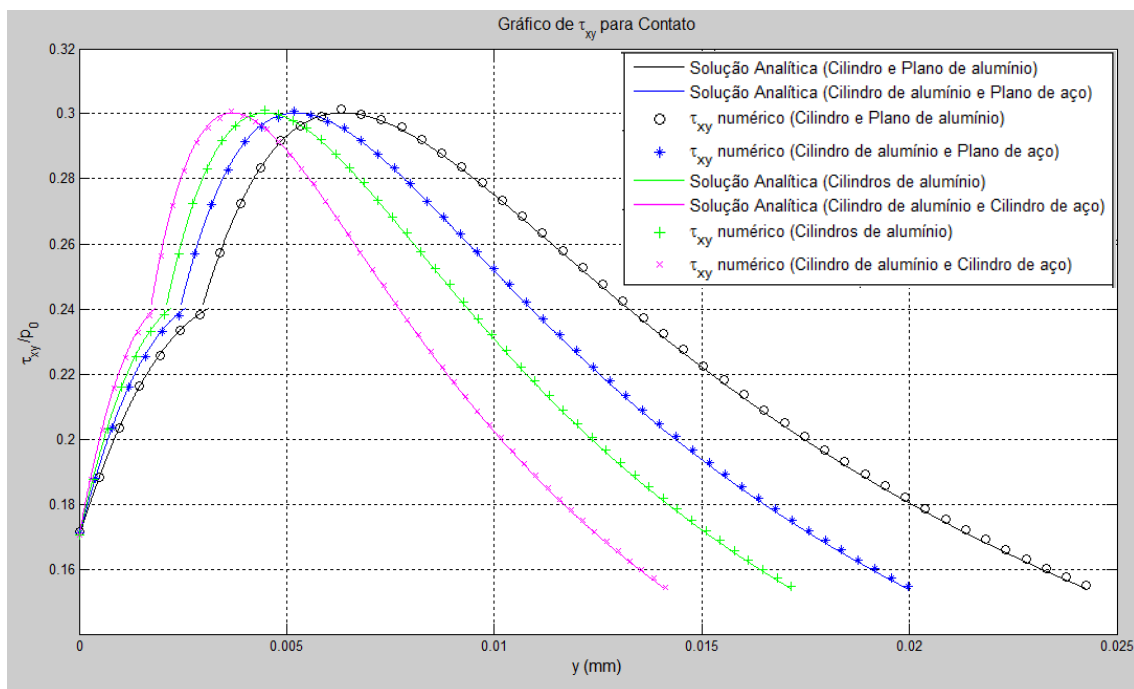


Figura 32 - Gráfico da tensão cisalhante máxima no plano xy.

4.2 MODELO ELÁSTICO – PLÁSTICO

Para essa análise foi realizado uma comparação dos resultados obtidos no modelo elástico e no modelo elasto-plástico, da pressão na superfície de contato, os resultados foram dispostos graficamente na figura 32. Outra análise foi feita avaliando-se o comportamento das tensões com o aumento gradual da carga P submetida. Para isso a simulação foi dividida 13 em passos (steps), onde a cada passo a carga é aumentada linearmente. Essa análise teve como objetivo observar a passagem do comportamento elástico para o plástico. Os dados gerados foram dispostos nas figuras 33 a 36. Após o aumento gradual do carregamento a carga submetida foi reduzida também em 13 passos (steps) a fim de avaliar as tensões residuais provocadas pela deformação plástica. Esses resultados foram dispostos nas figuras 37 a 40.

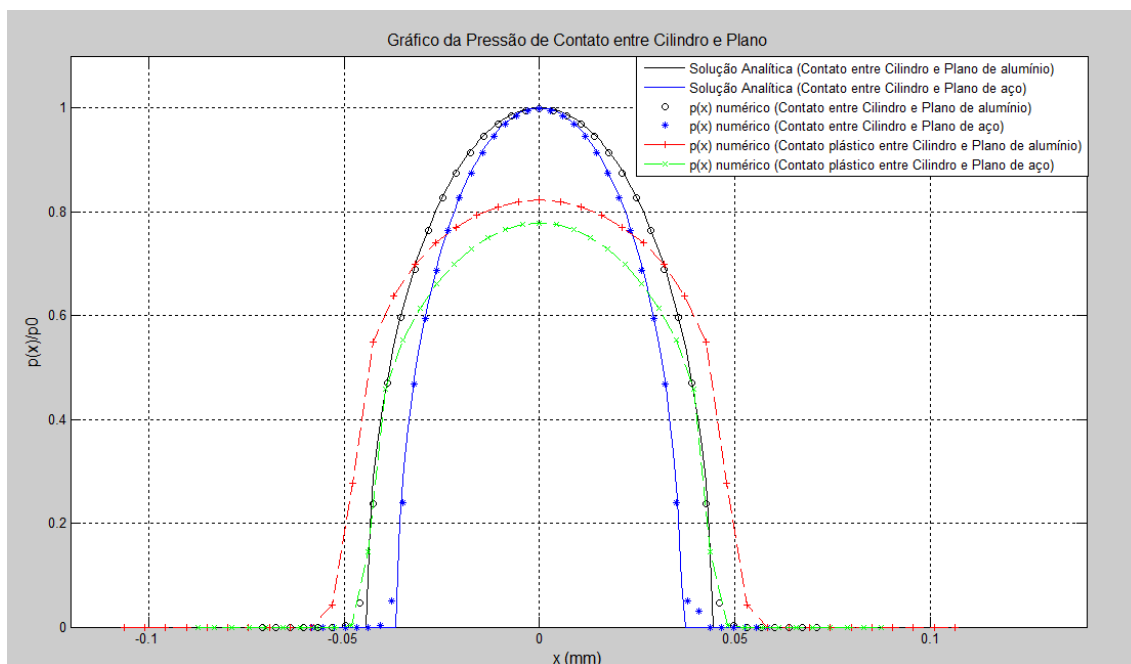


Figura 33 - Gráfico da pressão de contato entre cilindro e plano.

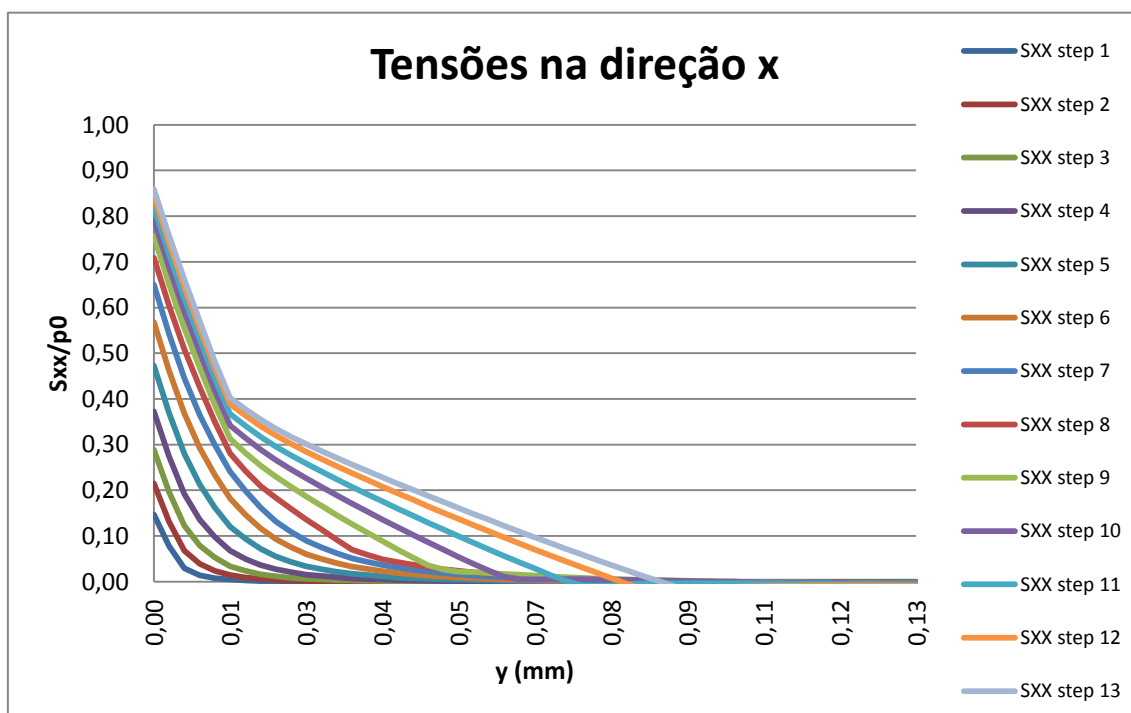


Figura 34 - Tensões na direção x, com aumento de carga gradual.

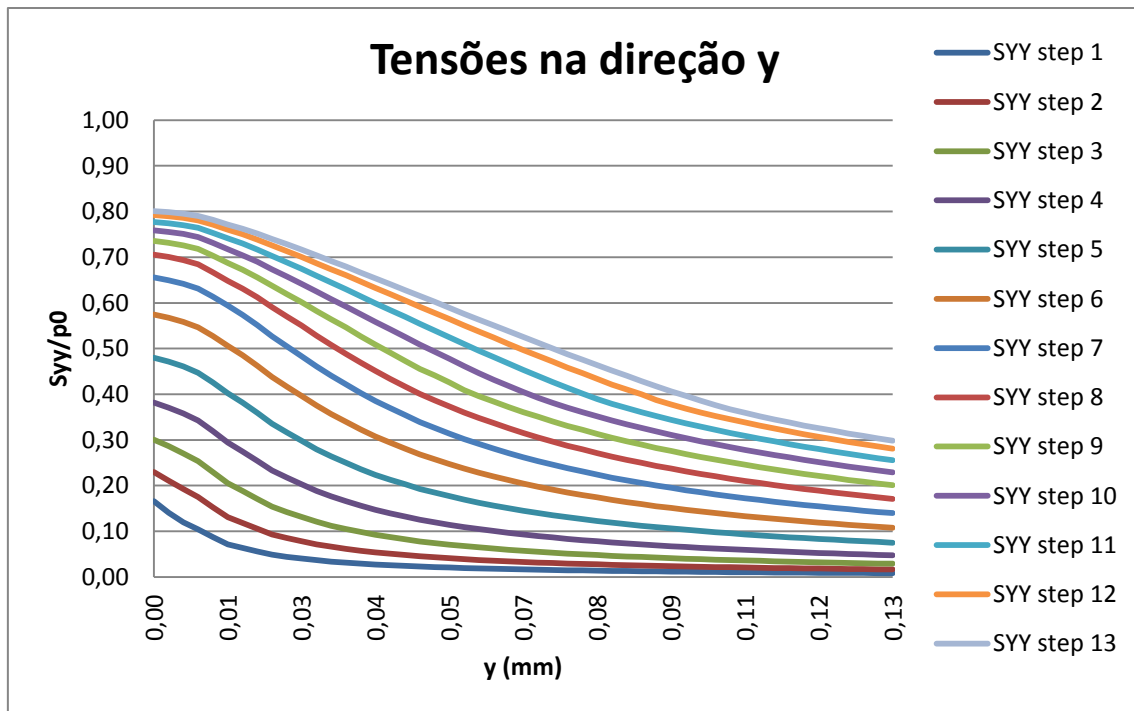


Figura 35 - Tensões na direção y, com aumento de carga gradual.

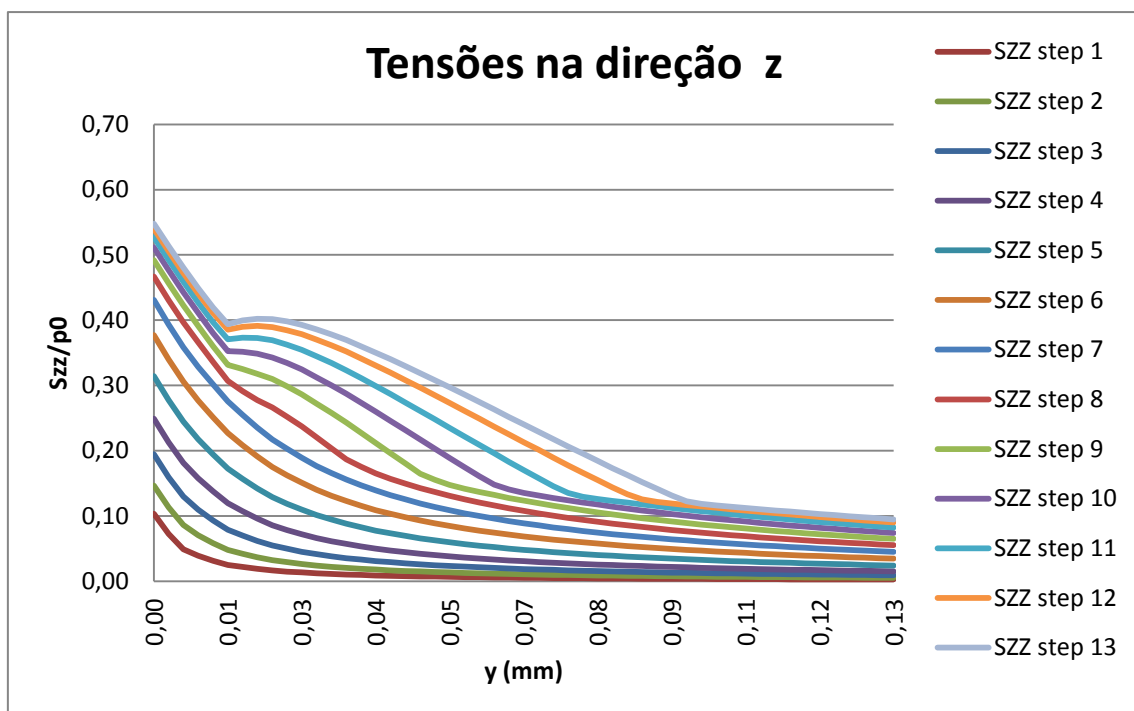


Figura 36 - Tensões na direção z, com aumento de carga gradual.

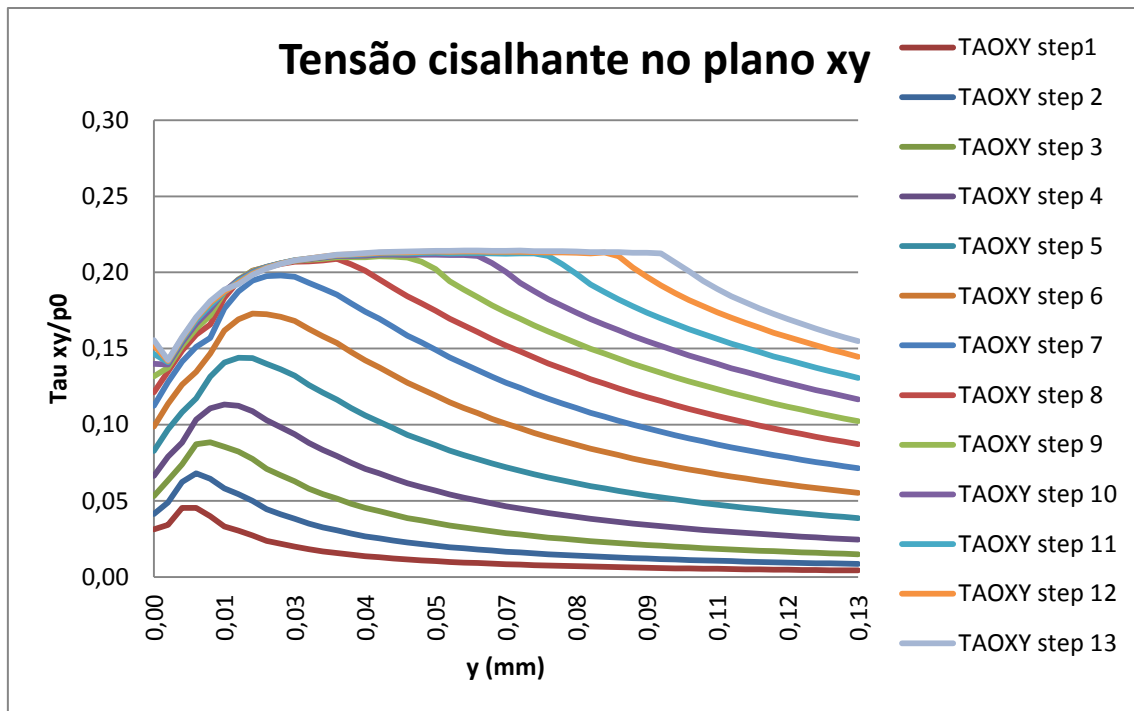


Figura 37 - Tensão cisalhante no plano xy, com aumento de carga gradual.

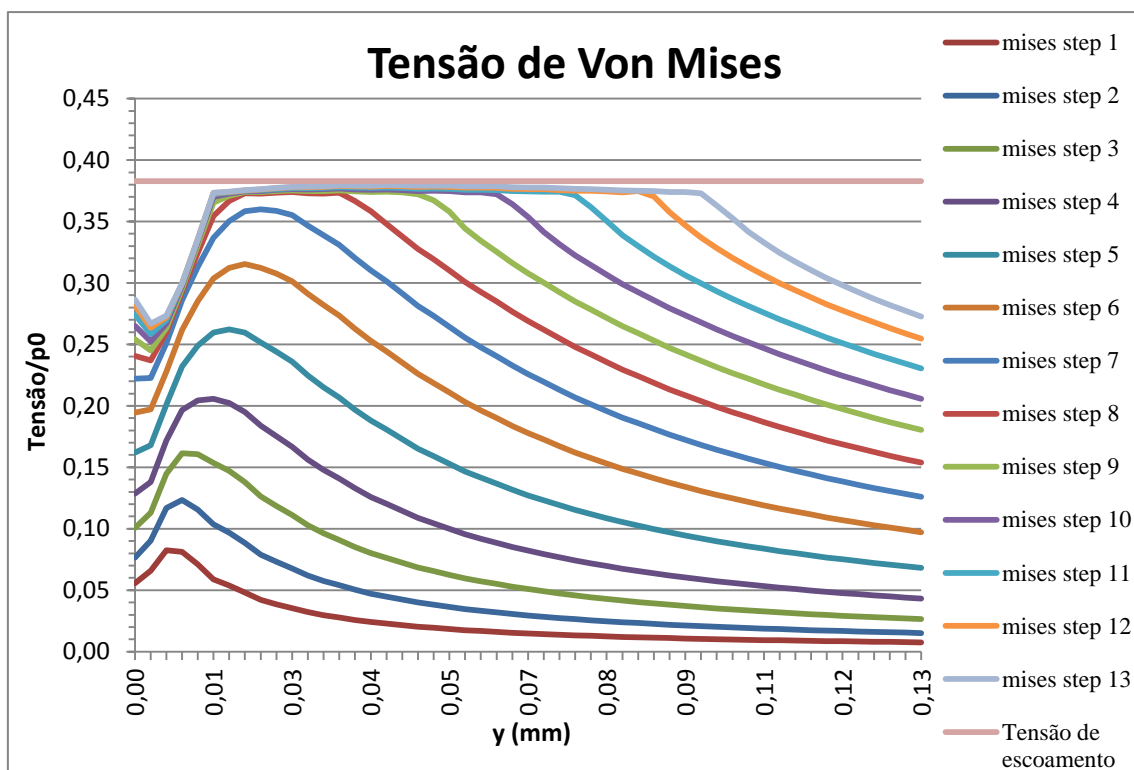


Figura 38 - Tensão de Von Mises, com aumento de carga gradual.

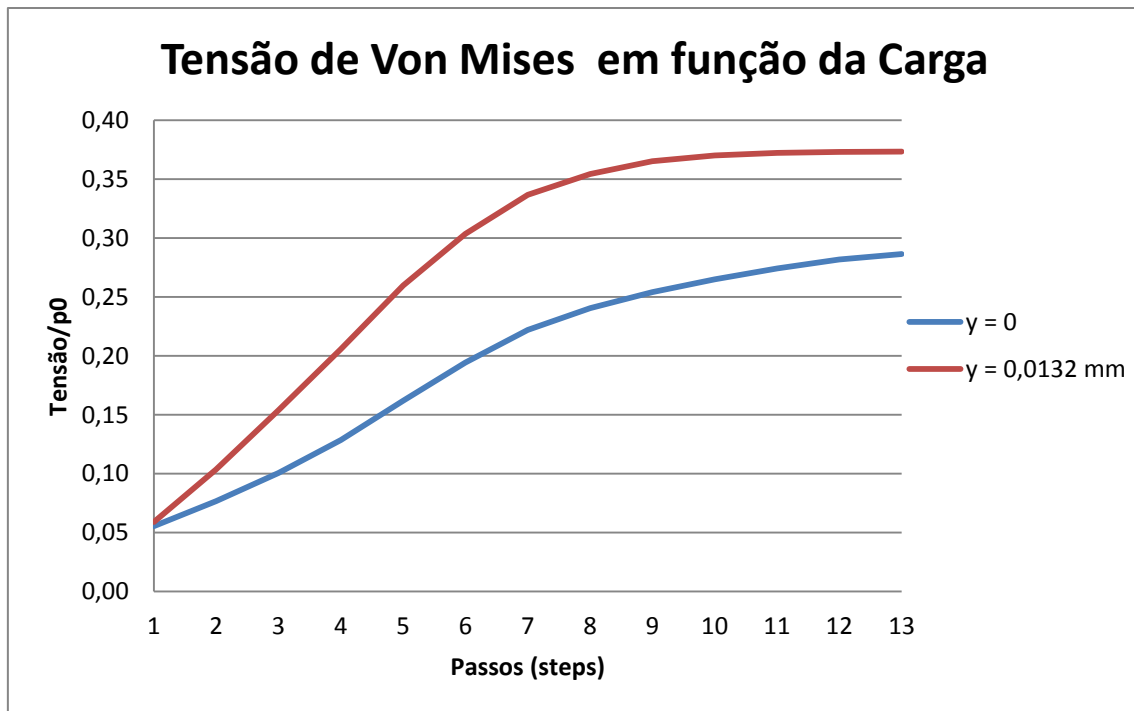


Figura 39 - Tensão de Von Mises em função da carga aplicada para $y = 0$ e $y = 0,0132 \text{ mm}$

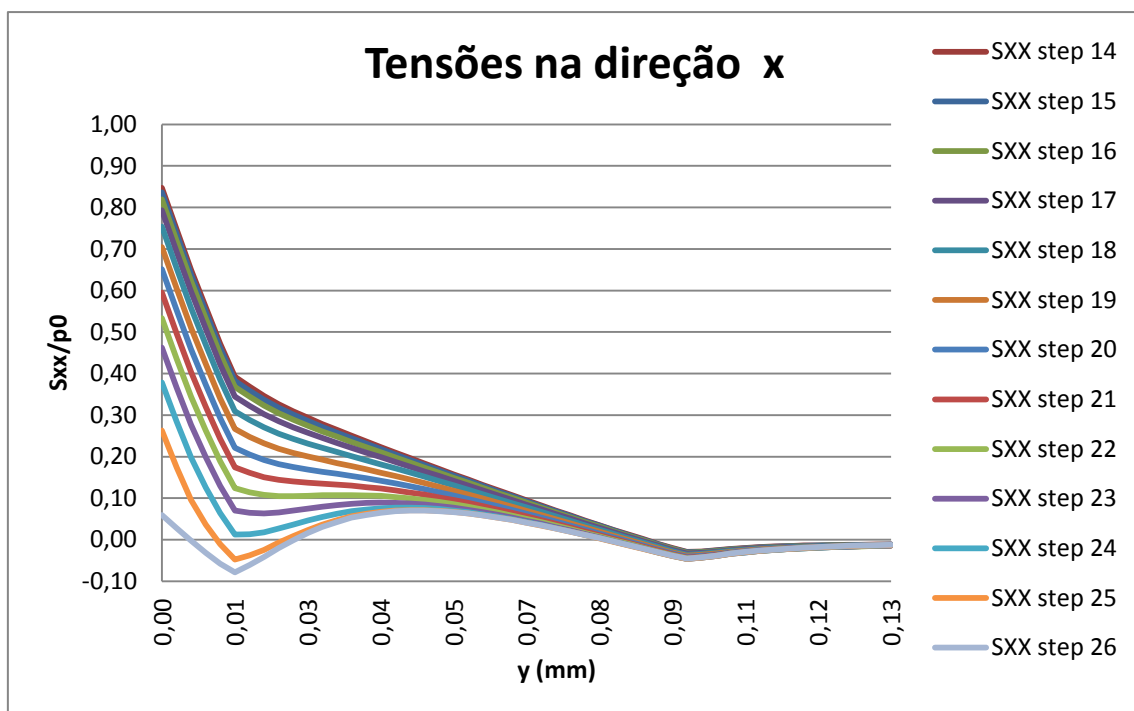


Figura 40 - Tensões na direção x, com redução de carga gradual.

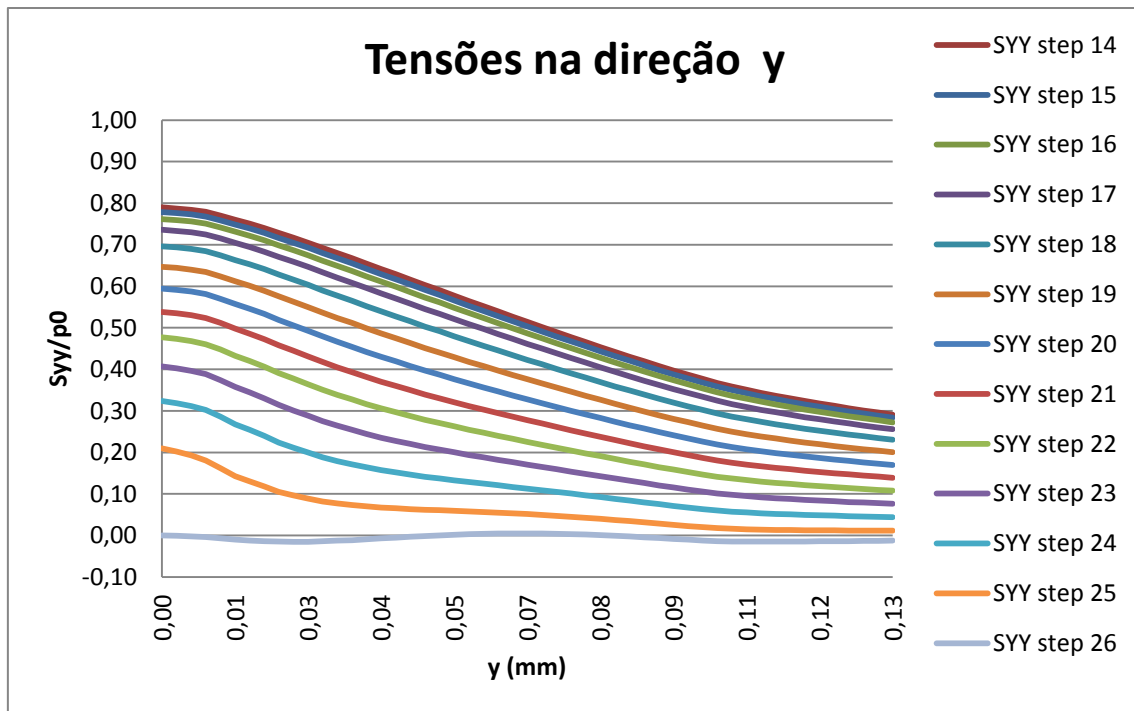


Figura 41 - Tensões na direção y, com redução de carga gradual.

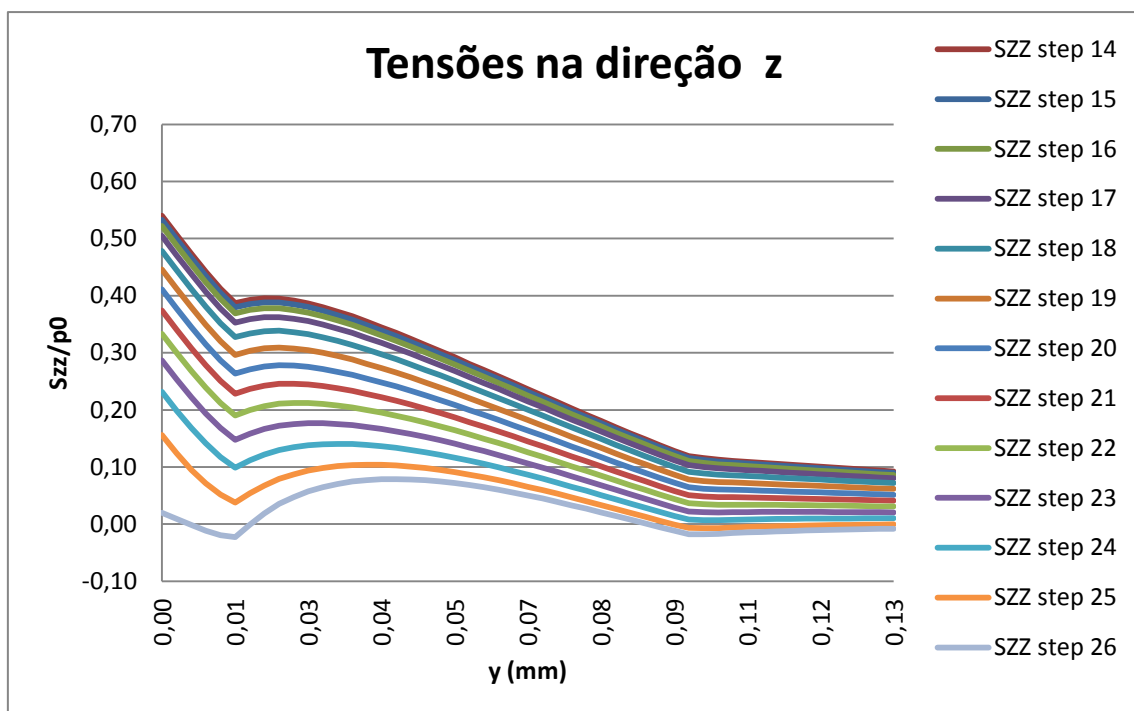


Figura 42 - Tensões na direção z, com redução de carga gradual.

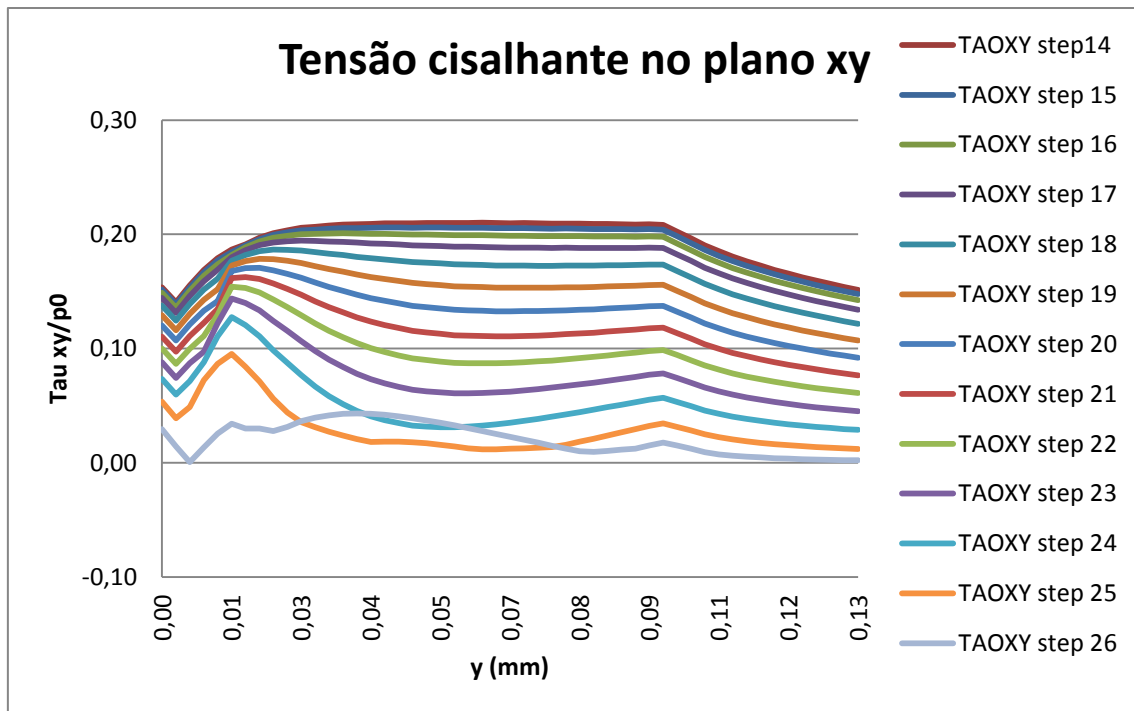


Figura 43 - Tensão cisalhante no plano xy, com redução de carga gradual.

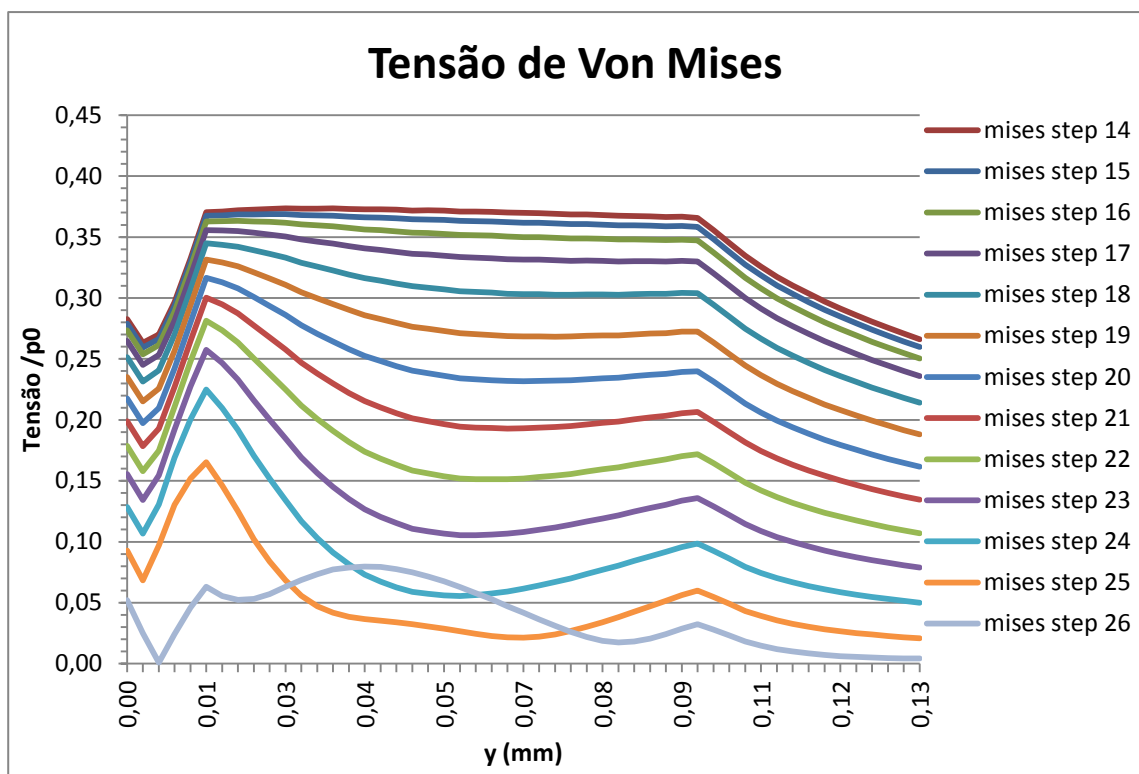


Figura 44 - Tensão de Von Mises, com redução de carga gradual.

5 CONCLUSÃO

Os resultados obtidos pelo modelo elástico proposto e apresentados na forma de comparação de gráficos apresentados na seção 4.1 foram muito próximos dos esperados pelas soluções analíticas representadas como linhas contínuas, validando-se, assim, a modelagem criada para o programa ANSYS para o caso do Contato de Hertz. As quatro formas distintas de apresentação do problema forneceram os resultados esperados. O contato entre os corpos de alumínio com corpos de aço, que possui maior módulo de elasticidade, forneceram tensões mais elevadas e mais concentradas do que as tensões produzidas pelo contato entre corpos de alumínio. Na comparação entre as geometrias diferentes, cilindro/plano e cilindro/cilindro, observa-se que para a superfície plana as tensões atingem as mesmas intensidades porem mais concentradas quando comparadas com o cilindro.

Devido à falta de soluções analíticas, para a análise elasto-plástica, não é possível validar os resultados obtidos na modelagem do problema. Por esse motivo não se pode tirar conclusões concretas dos resultados produzidos na modelagem. A aproximação do comportamento plástico do material como sendo linear e as considerações utilizadas para o cálculo do módulo tangente dos materiais dificulta ainda mais as conclusões que podem ser tiradas das soluções obtidas. As observações que podem ser feitas pela análise dos resultados é que devido às deformações plásticas ocorridas no contato entre os corpos, a região de contato é aumentada o que gera uma diminuição na pressão de contato por esta estar distribuída sobre uma região maior, isso pode ser visualizado no gráfico de pressão na região de contato apresentada na figura 32. Observa-se nesse gráfico que para o modelo elasto-plástico, quando se comparado com o regime unicamente elástico, apresenta maior região de contato e inferiores níveis de pressão.

Avaliando-se a figura 38 (tensão de Von Mises em função da carga aplicada) é interessante observar que para os passos iniciais, com baixas intensidades de cargas submetidas aos corpos, evidencia-se o comportamento elástico e ao atingir certo valor de carga (step 8) o material inicia o processo de escoamento em um ponto interno ao corpo. Com o aumento da carga (step 9 em diante) a região que está escoando aumenta mas pouco se propaga em direção a superfície de contato, se estabilizando aproximadamente no ponto $y = 0,0132$ mm.

Também é interessante de se notar, pela figura 44 da tensão de Von Mises com redução gradual de carga, as tensões residuais que se mantem devido às deformações plásticas estabelecidas durante o processo de carga e descarga.

5.1 PROPOSTA PARA TRABALHOS FUTUROS

Como proposta para trabalho futuro, pode-se analisar soluções analíticas no regime elasto-plástico a fim de se validar os resultados obtidos na modelagem. Assim como avaliar as aproximações adotadas para o comportamento plástico, comportamento bilinear adotado pelo o programa ANSYS e a aproximação utilizada no cálculo do módulo tangente dos materiais adotados. Pode-se obter mais informações mais precisas sobre o comportamento dos materiais utilizados nos cabos de transmissão de energia e assim abrir a possibilidade de analisar o comportamento elasto-plástico não através do modelo bilinear com endurecimento isotrópico (comando BISO no ANSYS) mais sim com o modelo multilinear (comando MISO no ANSYS) ou modelo não-linear (comando NLISO no ANSYS) obtendo assim resultados mais precisos.

Outra sugestão de pesquisa poderia ser expandir o modelo existente para um cenário 3D, para avaliar se a simplificação de estado plano de deformação é válida. Os resultados poderiam então ser comparados àqueles gerados na situação 2D e ao modelo analítico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANSYS. *Mechanical APDL Theory Reference*.(2011)

Affonso, I. D. (2012), Estudo Sobre Domínio de Aplicação de Soluções Analíticas para o Problema de Contato Entre Cilindros Sob Condições de Fretting Utilizando o ABAQUS. Projeto de Graduação, Universidade de Brasília.

Braga, F. V. G. (2008), Análise de Um Modelo Elastoplástico para Contato. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Budynas, R. G., & Nisbett, K. (2010), *Elementos de Máquinas de Shigley*. McGraw Hill.

Campos, M. D. (2005), Simulação Numérica de Escoamentos de Fluidos Pelo Método de Elementos Finitos Baseado em Volumes de Controle com a Técnica de Passo Fracionado. Tese de Mestrado, Universidade Estadual Paulista.

Clough, R.W. (1960)The finite finite element method in plane stress analysis. Proceedings, 2nd Conference on Eletronic Computation, ASCE, Pittsburg, PA.

Fadel, A. A. (2010), Avaliação do Efeito de Tracionamento em Elevados Níveis de EDS Sobre a Resistência em Fadiga do Condutor Ibis (Caa 397,5 MCM). Tese de Doutorado, Universidade de Brasília.

Guimarães, T. A. (2012), Simulação Numérica de Processos de Indentações. Projeto de Graduação, Universidade de Brasília.

Henriques, A. M. D. (2006), Bancada de Ensaios Mecânicos à Fadigas de Cabos Condutores de Energia. Tese de Doutorado, Universidade de Brasília.

Hertz, H., (1882) “Über die Berührung fester elastischer Körper”. Jnl Reine und angewandte Mathematik, 92.

Hughes, T. J. R.(1987) The Finite Element Method: Linear Static and dynamic finite element analysis. Prentice-Hall.

Johnson, K. L. (1985), Contacts Mechanics, Cambridge University Press.

Kikuchi,N., Oden, J. T. (1988). Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, U.S.A.

Neto, D. P. (2009), Sobre Estratégias de Resolução Numéricas de Problemas de Contato. Tese de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo.

Pulecio, S. A. R. (2010), Modelamento do ensaio de indentação instrumentada usando elementos finitos e análise dimensional: análise de unidade, variações experimentais, atrito e geometria e deformações do indentador, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Rade, D. A., Métodos dos Elementos Finitos. Apostila da disciplina Método dos Elementos Finitos aplicados a Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia.

Silva, G. H. (2009), Escolha de Parâmetros para Análise de Contato Entre Corpos Elásticos Usando Elementos Finitos e Redes Neurais. Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas.

Silva, N. C. (2007), Análise Biomecânica de Implantes Odontológicos. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia.

Souza, R. M. (2003), O Método de Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor. Universidade federal do Pará Centro tecnológico Departamento de engenharia civil Núcleo de instrumentação e computação aplicada à engenharia.

ANEXOS

A – CÓDIGO APDL

```
!CONVENÇÃO
C = 1
PL = 2
!S = 1
!I = 2
PI = 2*asin(1)
!Parametros que caracterizam o cilindro e Plano
!Controle de Interferencia entre as superficies de contato
inter=1e-6

!CILINDRO
!DIMENSIONAL
RC = 1.9865
!MATERIAL
EC = 68900
VC = 0.33
!PLANO
!DIMENSIONAL
L1 = 400
L2 = 50
!MATERIAL
!EP = 68900
!VP = 0.33
EP = 200000
VP = 0.29

!CILINDRO SUPERIOR
!DIMENSIONAL
!RS = 1.9865
!MATERIAL
!ES = 68900
!VS = 0.33
!CILINDRO INFERIOR
!DIMENSIONAL
!RI = 1.9865
!MATERIAL
!EI = 68900
!VI = 0.33
!EI = 200000
!VI = 0.29
```

```

!FORÇA ATUANTE
P = 1
!SOLUÇÃO ANALITICA
!COMPRIMENTO DA LINHA DE CONTATO, a
RIGapar = (1-(VC**2))/EC + (1-(VP**2))/EP
Rapar = RC

! RIGapar = (1-(VS**2))/ES + (1-(VI**2))/EI
!Rapar = 1/(1/RS + 1

a = (4*P*Rapar*RIGapar/PI)**0.5
ALT = RC - ((RC**2)-((4.5*a)**2))**0.5
PRESSAO = (P*2)/(PI*a)
!/eof
/PREP7
!Propriedades elasticas

MP,EX,C,EC
MP,PRXY,C,VC
MP,EX,PL,EP
MP,PRXY,PL,VP

!MP,EX,S,ES
!MP,PRXY,S,VS
!MP,EX,I,EI
!MP,PRXY,I,VI

!Propriedades elastoplasticas

!MPTEMP,,,,,,,,
!MPTEMP,1,0
!MPDATA,EX,C,,EC
!MPDATA,PRXY,1,,VC
!TB,BISO,1,1,2,
!TBTEMP,0
!TBDATA,,165,1666,,,

!MPTEMP,,,,,,,,
!MPTEMP,1,0
!MPDATA,EX,PL,,EP
!MPDATA,PRXY,2,,VP
!TB,BISO,2,1,2,
!TBTEMP,0
!TBDATA,,165,1666,,,

!MPTEMP,,,,,,,,
!MPTEMP,1,0
!MPDATA,EX,PL,,EP
!MPDATA,PRXY,2,,VP
!TB,BISO,2,1,2,
!TBTEMP,0

```

!TBDATA,,1240,5030,,,

!Especificação do Elemento

ET,1,PLANE183

ET,2,CONTA172

ET,3,TARGE169

KEYOPT,1,1,1

KEYOPT,1,3,2

!Definição da Geometria

K,1,0,0

K,2,4.5*a,ALT

K,3,4.5*a,9*a

K,4,RC,RC

K,5,0,RC

K,6,-RC,RC

K,7,-4.5*a,ALT

K,8,-4.5*a,9*a

K,9,0,INTER

K,10,4.5*a,INTER

K,11,4.5*a,INTER-9*a

K,12,RC,INTER

K,13,RC,INTER-RC/4

K,14,-RC,INTER-RC/4

K,15,-RC,INTER

K,16,-4.5*a,INTER

K,17,-4.5*a,INTER-9*a

!K,9,0,INTER

!K,10,4.5*a,INTER-ALT

!K,11,4.5*a,INTER-9*a

!K,12,RI,INTER-RI

!K,13,0,INTER-RI

!K,14,-RI,INTER-RI

!K,15,-4.5*a,INTER-ALT

!K,16,-4.5*a,INTER-9*a

!/eof

!Definindo areas

LARC,1,2,5,RC

LARC,2,4,5,RC

LSTR,4,5

LSTR,5,6

LARC,6,7,5,RC

LARC,7,1,5,RC

LSTR,2,3

LSTR,3,8

LSTR,8,7

AL,2,3,4,5,7,8,9

AL,1,6,7,8,9

LSTR,9,10

LSTR,10,12

LSTR,12,13

LSTR,13,14

LSTR,14,15
LSTR,15,16
LSTR,16,9
LSTR,10,11
LSTR,11,17
LSTR,17,16
AL,11,12,13,14,15,17,18,19
AL,10,16,17,18,19

!LARC,9,10,13,RI
!LARC,10,12,13,RI
!LSTR,12,13
!LSTR,13,14
!LARC,14,15,13,RI
!LARC,15,9,13,RI
!LSTR,10,11
!LSTR,11,16
!LSTR,16,15
!AL,11,12,13,14,16,17,18
!AL,10,15,16,17,18

!/eof
!Criando malha
LESIZE,1,,,40
LESIZE,6,,,40
LESIZE,7,,,80
LESIZE,8,,,80
LESIZE,9,,,80
LESIZE,2,,,60
LESIZE,3,,,20
LESIZE,4,,,20
LESIZE,5,,,60
LESIZE,10,,,40
LESIZE,16,,,40
LESIZE,17,,,80
LESIZE,18,,,80
LESIZE,19,,,80
LESIZE,11,,,40
LESIZE,15,,,40
LESIZE,12,,,10
LESIZE,14,,,10
LESIZE,13,,,80
MSHAPE,1,2D
MSHKEY,0
MAT,C
TYPE,1
AMESH,1
MSHAPE,1,2D
MSHKEY,0
MAT,C
TYPE,1
AMESH,2

```

MSHAPE,1,2D
MSHKEY,0
MAT,PL
TYPE,1
AMESH,3
MSHAPE,1,2D
MSHKEY,0
MAT,PL
TYPE,1
AMESH,4
!/eof
!ELEMENTO DE CONTATO TARGE169
LSEL,S,LINE,,1
NSLL,,1
CM,CYL1,NODE
REAL,1
TYPE,3
ESURF
LSEL,S,LINE,,6
NSLL,,1
CM,CYL1,NODE
REAL,1
TYPE,3
ESURF
!ELEMENTO DE CONTATO CONTA172
LSEL,S,LINE,,10
NSLL,,1
REAL,1
TYPE,2
ESURF
LSEL,S,LINE,,16
NSLL,,1
REAL,1
TYPE,2
ESURF
NSEL,ALL
LSEL,ALL

!LSEL,S,LINE,,15
!NSLL,,1
!REAL,1
!TYPE,3
!ESURF
!NSEL,ALL
!LSEL,ALL

!/eof
!RESTRIÇÕES
LSEL,S,LINE,,13
NSLL,S,1
D,ALL,UY,0
NSEL,ALL
LSEL,ALL

```

```

!LSEL,S,LINE,,12
!NSLL,S,1
!D,ALL,UY,0
!NSEL,ALL
!LSEL,ALL

```

```

!GRAUS DE LIBERDADE CASADOS
LSEL,S,LINE,,3
NSLL,S,1
CP,1,UY,ALL
NSEL,ALL
LSEL,ALL
LSEL,S,LINE,,4
NSLL,S,1
CP,1,UY,ALL
NSEL,ALL
LSEL,ALL
!FORÇA APLICADA
FK,5,FY,-P
FINISH
/SOLU
SOLVE
FINISH

```

```

!NSUBST,40,50,10
!OUTRES,ERASE
!OUTRES,ALL,ALL
!PSTRES,1
!TIME,1
!SOLVE
!FINISH

```

```

!ANÁLISE DA SOLUÇÃO
/eof
/POST1
PATH,EIXOX,2,20,50,
PPATH,1,0,-2*a,-INTER,0,0,
PPATH,2,0,2*a,-INTER,0,0,
AVPRIN,0, ,
!*
PDEF,PRESS,CONT,PRES,AVG
/PBC,PATH, ,0
!*
PLPATH,PRESS
/eof
PATH,EIXOY,2,40,50,
PPATH,1,0,,,0,
PPATH,2,0,0,3*a,0,0,
AVPRIN,0, ,
!*
PDEF,SX,S,X,AVG
/PBC,PATH, ,0
!*
AVPRIN,0, ,

```

```

!*
PDEF,SY,S,Y,AVG
/PBC,PATH, ,0
!*
AVPRIN,0, ,
!*
PDEF,SZ,S,Z,AVG
/PBC,PATH, ,0
!*
AVPRIN,0, ,
!*
PDEF,S1,S,1,AVG
/PBC,PATH, ,0
!*
AVPRIN,0, ,
!*
PDEF,S3,S,3,AVG
/PBC,PATH, ,0
!*
PCALC,ADD,Sxx,SX, ,-1,0, ,
PCALC,ADD,Syy,SY, ,-1,0, ,
PCALC,ADD,Szz,SZ, ,-1,0, ,
PCALC,ADD,TAUmax,S1,S3,0.5,-0.5, ,
PCALC,ADD,SXX1,SXX, ,1/PRESSAO,1, ,
PCALC,ADD,SY1,SY, ,1/PRESSAO,1, ,
PCALC,ADD,SZZ1,SZZ, ,1/PRESSAO,1, ,
PCALC,ADD,TAUmax1,TAUmax, ,1/PRESSAO,1, ,
PAGET,SUPERIOR,TABL
PLPATH,SXX1,SY1,SZZ1,TAUmax1,TAUXY1
/eof
PDEF, ,EPTO,X,AVG
/PBC,PATH, ,0
!*
AVPRIN,0, ,
!*
PDEF, ,EPTO,Y,AVG
/PBC,PATH, ,0
!*
AVPRIN,0, ,
!*
PDEF, ,EPTO,Z,AVG
/PBC,PATH, ,0
!*
AVPRIN,0, ,
!*
PDEF, ,EPTO,EQV,AVG
/PBC,PATH, ,0
!*
PLPATH,EPTOX,EPTOY,EPTOZ,EPTOEQV

```

B – ROTINA NO MATLAB PARA COMPARAÇÃO RESULTADOS OBTIDOS

```
clear all;
close all;
clc;
% Variáveis
%Parametros que caracterizam o cilindro e Plano

%CILINDRO

%DIMENSIONAL

RC = 1.9865; % mm

%MATERIAL

EC = 68900; % MPa
VC = 0.33;

EC_ac = 200000; % MPa
VC_ac = 0.29;

%PLANO

%MATERIAL

EP = 68900; % MPa
VP = 0.33;

EP_ac = 200000; % MPa
VP_ac = 0.29;

%FORÇA ATUANTE

P = 1; % N

% Cálculos
R = RC;

R_CC = RC/2;

E = (((1-VC^2)/EC)+((1-VP^2)/EP)) ^ (-1);
p0 = sqrt(((P*E)/(pi*R)));
a = sqrt(((4*P*R)/(pi*E)));

E_ac = (((1-VC^2)/EC)+((1-VP_ac^2)/EP_ac)) ^ (-1);
p0_ac = sqrt(((P*E_ac)/(pi*R)));
a_ac = sqrt(((4*P*R)/(pi*E_ac)));

E_CC = (((1-VC^2)/EC)+((1-VC^2)/EC)) ^ (-1);
p0_CC = sqrt(((P*E_CC)/(pi*R_CC)));
a_CC = sqrt(((4*P*R_CC)/(pi*E_CC)));

E_CC_ac = (((1-VC^2)/EC)+((1-VC_ac^2)/EC_ac)) ^ (-1);
p0_CC_ac = sqrt(((P*E_CC_ac)/(pi*R_CC)));
a_CC_ac = sqrt(((4*P*R_CC)/(pi*E_CC_ac)));
```

```

% Resultados obtidos pelo ANSYS:

% Gráficos:
% Pressão no Contato:
x = -2*a:0.0001:2*a;
x_ac = -2*a_ac:0.0001:2*a_ac;

pressao = (((2*P)/(pi*a^2))*(a^2-x.^2).^(1/2))/p0;
pressao_ac = (((2*P)/(pi*a_ac^2))*(a_ac^2-x_ac.^2).^(1/2))/p0_ac;
%pressao = (((2*P)/(pi*a^2))*(a^2-x.^2).^(1/2));
%pressao_ac = (((2*P)/(pi*a_ac^2))*(a_ac^2-x_ac.^2).^(1/2));

x_num = [-0.16177E-01 -0.15530E-01 -0.14883E-01 -0.14236E-01 -
0.13589E-01 -0.12942E-01 -0.12295E-01 -0.11647E-01 -0.11000E-01 -
0.10353E-01 -0.97062E-02 -0.90591E-02 -0.84120E-02 -0.77650E-02 -
0.71179E-02 -0.64708E-02 -0.58237E-02 -0.51766E-02 -0.45296E-02 -
0.38825E-02 -0.32354E-02 -0.25883E-02 -0.19412E-02 -0.12942E-02 -
0.64708E-03 0.15179E-17 0.64708E-03 0.12942E-02 0.19412E-02 0.25883E-
02 0.32354E-02 0.38825E-02 0.45296E-02 0.51766E-02 0.58237E-02
0.64708E-02 0.71179E-02 0.77650E-02 0.84120E-02 0.90591E-02 0.97062E-
02 0.10353E-01 0.11000E-01 0.11647E-01 0.12295E-01 0.12942E-01
0.13589E-01 0.14236E-01 0.14883E-01 0.15530E-01 0.16177E-01];
p_num = [0.20021E-32 0.20021E-32 0.20021E-32 0.20021E-32 0.20021E-
32 0.20021E-32 0.20021E-32 0.20021E-32 0.20021E-32 0.20021E-32
0.20021E-32 0.22874 3.9961 18.984 37.098 46.980 54.176 60.103 64.985
68.666 71.713 74.204 76.038 77.245 78.018 78.364 78.001 77.211 75.987
74.136 71.628 68.564 64.866 59.967 54.023 46.808 36.907 18.822 3.8971
0.22307 0.20021E-32 0.20021E-32 0.20021E-32 0.20021E-32 0.20021E-32
0.20021E-32 0.20021E-32 0.20021E-32 0.20021E-32 0.20021E-32 0.20021E-
32];
p_num_norm = p_num/p0;
x_num_ac = [-0.13311E-01 -0.12778E-01 -0.12246E-01 -0.11714E-01 -
0.11181E-01 -0.10649E-01 -0.10116E-01 -0.95838E-02 -0.90514E-02 -
0.85190E-02 -0.79865E-02 -0.74541E-02 -0.69217E-02 -0.63892E-02 -
0.58568E-02 -0.53243E-02 -0.47919E-02 -0.42595E-02 -0.37270E-02 -
0.31946E-02 -0.26622E-02 -0.21297E-02 -0.15973E-02 -0.10649E-02 -
0.53243E-03 -0.62884E-17 0.53243E-03 0.10649E-02 0.15973E-02 0.21297E-
02 0.26622E-02 0.31946E-02 0.37270E-02 0.42595E-02 0.47919E-02
0.53243E-02 0.58568E-02 0.63892E-02 0.69217E-02 0.74541E-02 0.79865E-
02 0.85190E-02 0.90514E-02 0.95838E-02 0.10116E-01 0.10649E-01
0.11181E-01 0.11714E-01 0.12246E-01 0.12778E-01 0.13311E-01];
p_num_ac = [0.24332E-32 0.24332E-32 0.24332E-32 0.24332E-32
0.24332E-32 0.24332E-32 0.24332E-32 0.24332E-32 0.24332E-32 0.24332E-
32 0.24332E-32 0.29706 5.2209 23.245 44.901 56.888 65.631 72.842
78.790 83.279 86.994 90.034 92.277 93.755 94.705 95.136 94.705 93.755
92.277 90.034 86.994 83.279 78.790 72.842 65.631 56.888 44.901 23.246
5.2216 0.29710 0.24332E-32 0.24332E-32 0.24332E-32 0.24332E-32
0.24332E-32 0.24332E-32 0.24332E-32 0.24332E-32 0.24332E-32 0.24332E-
32 0.24332E-32];
p_num_ac_norm = p_num_ac/p0_ac;
figure;

plot(x,pressao,'b',x_ac,pressao_ac,'r',x_num,p_num_norm,'ob',x_num_ac,
p_num_ac_norm,'*r');

%plot(x,pressao,'b',x_ac,pressao_ac,'r',x_num,p_num,'ob',x_num_ac,p_nu
m_ac,'*r');
%axis auto;

```

```

axis ([-0.012 0.014 0 1.1]);
xlabel('x (mm)', 'fontsize', 12);
ylabel('p(x)/p_0', 'fontsize', 12);
title('Gráfico da Pressão de Contato entre Cilindro e
Plano', 'fontsize', 12);
legend('Solução Analítica (Cilindro e Plano de
alumínio)', 'Solução Analítica (Cilindro de alumínio e Plano de
aço)', 'p(x) numérico (Cilindro e Plano de alumínio)', 'p(x) numérico
(Cilindro de alumínio e Plano de aço', 0);
hold on;
grid on;

%% sigma xx:

y = 0:0.001:3*a;
y_ac = 0:0.001:3*a_ac;

y_CC = 0:0.001:3*a_CC;
y_CC_ac = 0:0.001:3*a_CC_ac;

y_num = [0.0000 0.48531E-03 0.97062E-03 0.14559E-02 0.19412E-02
0.24265E-02 0.29119E-02 0.33972E-02 0.38825E-02 0.43678E-02 0.48531E-
02 0.53384E-02 0.58237E-02 0.63090E-02 0.67943E-02 0.72796E-02
0.77650E-02 0.82503E-02 0.87356E-02 0.92209E-02 0.97062E-02 0.10192E-
01 0.10677E-01 0.11162E-01 0.11647E-01 0.12133E-01 0.12618E-01
0.13103E-01 0.13589E-01 0.14074E-01 0.14559E-01 0.15045E-01 0.15530E-
01 0.16015E-01 0.16501E-01 0.16986E-01 0.17471E-01 0.17956E-01
0.18442E-01 0.18927E-01 0.19412E-01 0.19898E-01 0.20383E-01 0.20868E-
01 0.21354E-01 0.21839E-01 0.22324E-01 0.22810E-01 0.23295E-01
0.23780E-01 0.24265E-01];

y_num_ac = [0.0000 0.39933E-03 0.79865E-03 0.11980E-02 0.15973E-02
0.19966E-02 0.23960E-02 0.27953E-02 0.31946E-02 0.35939E-02 0.39933E-
02 0.43926E-02 0.47919E-02 0.51912E-02 0.55906E-02 0.59899E-02
0.63892E-02 0.67885E-02 0.71879E-02 0.75872E-02 0.79865E-02 0.83858E-
02 0.87852E-02 0.91845E-02 0.95838E-02 0.99832E-02 0.10382E-01
0.10782E-01 0.11181E-01 0.11580E-01 0.11980E-01 0.12379E-01 0.12778E-
01 0.13178E-01 0.13577E-01 0.13976E-01 0.14376E-01 0.14775E-01
0.15174E-01 0.15574E-01 0.15973E-01 0.16372E-01 0.16772E-01 0.17171E-
01 0.17570E-01 0.17970E-01 0.18369E-01 0.18768E-01 0.19168E-01
0.19567E-01 0.19966E-01];

y_num_CC = [0.0000 0.34317E-03 0.68633E-03 0.10295E-02 0.13727E-02
0.17158E-02 0.20590E-02 0.24022E-02 0.27453E-02 0.30885E-02 0.34317E-
02 0.37748E-02 0.41180E-02 0.44612E-02 0.48043E-02 0.51475E-02
0.54907E-02 0.58338E-02 0.61770E-02 0.65202E-02 0.68633E-02 0.72065E-
02 0.75497E-02 0.78928E-02 0.82360E-02 0.85791E-02 0.89223E-02
0.92655E-02 0.96086E-02 0.99518E-02 0.10295E-01 0.10638E-01 0.10981E-
01 0.11324E-01 0.11668E-01 0.12011E-01 0.12354E-01 0.12697E-01
0.13040E-01 0.13383E-01 0.13727E-01 0.14070E-01 0.14413E-01 0.14756E-
01 0.15099E-01 0.15442E-01 0.15786E-01 0.16129E-01 0.16472E-01
0.16815E-01 0.17158E-01];

y_num_CC_ac = [0.0000 0.28237E-03 0.56473E-03 0.84710E-03
0.11295E-02 0.14118E-02 0.16942E-02 0.19766E-02 0.22589E-02 0.25413E-
02 0.28237E-02 0.31060E-02 0.33884E-02 0.36708E-02 0.39531E-02
0.42355E-02 0.45179E-02 0.48002E-02 0.50826E-02 0.53650E-02 0.56473E-

```

```

02 0.59297E-02 0.62121E-02 0.64944E-02 0.67768E-02 0.70592E-02
0.73415E-02 0.76239E-02 0.79063E-02 0.81886E-02 0.84710E-02 0.87534E-
02 0.90357E-02 0.93181E-02 0.96004E-02 0.98828E-02 0.10165E-01
0.10448E-01 0.10730E-01 0.11012E-01 0.11295E-01 0.11577E-01 0.11859E-
01 0.12142E-01 0.12424E-01 0.12706E-01 0.12989E-01 0.13271E-01
0.13554E-01 0.13836E-01 0.14118E-01];

    sigmaxx_analitico = (1/a)*((a^2+2*y.^2).*(a^2+y.^2).^(-1/2)-2.*y);
    sigmaxx_analitico_ac =
(1/a_ac)*((a_ac^2+2*y_ac.^2).*(a_ac^2+y_ac.^2).^(-1/2)-2.*y_ac);

    sigmaxx_analitico_CC =
(1/a_CC)*((a_CC^2+2*y_CC.^2).*(a_CC^2+y_CC.^2).^(-1/2)-2.*y_CC);
    sigmaxx_analitico_CC_ac =
(1/a_CC_ac)*((a_CC_ac^2+2*y_CC_ac.^2).*(a_CC_ac^2+y_CC_ac.^2).^(-1/2)-
2.*y_CC_ac);

    sigmaxx_numerico = [0.99265 0.88146 0.77724 0.68459 0.60263
0.52617 0.46317 0.40583 0.35409 0.31187 0.27301 0.24015 0.21158
0.18554 0.16492 0.14582 0.12916 0.11525 0.10252 0.91712E-01 0.82135E-
01 0.73748E-01 0.66437E-01 0.59694E-01 0.54170E-01 0.49058E-01
0.44192E-01 0.40464E-01 0.36862E-01 0.33465E-01 0.30688E-01 0.28129E-
01 0.25705E-01 0.23585E-01 0.21760E-01 0.19986E-01 0.18332E-01
0.17014E-01 0.15698E-01 0.14383E-01 0.13412E-01 0.12432E-01 0.11435E-
01 0.10640E-01 0.99074E-02 0.91403E-02 0.84787E-02 0.79242E-02
0.73305E-02 0.67724E-02 0.63440E-02];
    sigmaxx_numerico_ac = [0.99254 0.88139 0.77721 0.68462 0.60272
0.52631 0.46336 0.40607 0.35436 0.31218 0.27335 0.24051 0.21195
0.18593 0.16531 0.14621 0.12956 0.11565 0.10291 0.92105E-01 0.82528E-
01 0.74136E-01 0.66823E-01 0.60077E-01 0.54550E-01 0.49434E-01
0.44567E-01 0.40835E-01 0.37231E-01 0.33830E-01 0.31052E-01 0.28492E-
01 0.26066E-01 0.23945E-01 0.22119E-01 0.20343E-01 0.18690E-01
0.17371E-01 0.16054E-01 0.14740E-01 0.13769E-01 0.12788E-01 0.11791E-
01 0.10998E-01 0.10265E-01 0.94978E-02 0.88379E-02 0.82841E-02
0.76903E-02 0.71339E-02 0.67064E-02];

    sigmaxx_numerico_CC = [0.99660 0.88478 0.78002 0.68693 0.60462
0.52786 0.46463 0.40711 0.35521 0.31288 0.27393 0.24099 0.21236
0.18628 0.16562 0.14648 0.12980 0.11587 0.10311 0.92290E-01 0.82704E-
01 0.74305E-01 0.66987E-01 0.60238E-01 0.54708E-01 0.49591E-01
0.44724E-01 0.40992E-01 0.37389E-01 0.33988E-01 0.31213E-01 0.28655E-
01 0.26229E-01 0.24111E-01 0.22288E-01 0.20514E-01 0.18864E-01
0.17547E-01 0.16232E-01 0.14921E-01 0.13953E-01 0.12974E-01 0.11980E-
01 0.11190E-01 0.10459E-01 0.96941E-02 0.90375E-02 0.84863E-02
0.78943E-02 0.73410E-02 0.69158E-02];
    sigmaxx_numerico_CC_ac = [0.99545 0.88386 0.77930 0.68640 0.60426
0.52764 0.46452 0.40710 0.35528 0.31301 0.27411 0.24121 0.21260
0.18654 0.16588 0.14675 0.13007 0.11614 0.10339 0.92560E-01 0.82970E-
01 0.74564E-01 0.67240E-01 0.60487E-01 0.54950E-01 0.49828E-01
0.44956E-01 0.41219E-01 0.37611E-01 0.34205E-01 0.31427E-01 0.28865E-
01 0.26436E-01 0.24317E-01 0.22491E-01 0.20715E-01 0.19064E-01
0.17746E-01 0.16430E-01 0.15120E-01 0.14151E-01 0.13173E-01 0.12178E-
01 0.11390E-01 0.10660E-01 0.98960E-02 0.92416E-02 0.86919E-02
0.81014E-02 0.75507E-02 0.71276E-02];

    figure;

plot(y,sigmaxx_analitico,'k',y_ac,sigmaxx_analitico_ac,'b',y_num,sigma
xx_numerico,'ok',y_num_ac,sigmaxx_numerico_ac,'xb',y_CC,sigmaxx_analit

```



```

ico_CC,'g',y_CC_ac,sigmaxx_analitico_CC_ac,'m',y_num_CC,sigmaxx_numeri
co_CC,'*g',y_num_CC_ac,sigmaxx_numerico_CC_ac,'+m');
axis auto;
xlabel('y (mm)','fontsize',12);
ylabel('\sigma_{xx}/p_0','fontsize',12);
title('Gráfico de \sigma_{xx} para Contato','fontsize',12);
legend('Solução Analítica (Cilindro e Plano de
alumínio)','Solução Analítica (Cilindro de alumínio e Plano de
aço)','\sigma_{xx} numérico (Cilindro e Plano de
alumínio)','\sigma_{xx} numérico (Cilindro de alumínio e Plano de
aço)','Solução Analítica (Cilindros de alumínio)','Solução Analítica
(Cilindro de alumínio e Cilindro de aço) ','\sigma_{xx} numérico
(Cilindros de alumínio)','\sigma_{xx} numérico (Cilindro de alumínio e
Cilindro de aço)',0);
hold on;
grid on;

%% sigma yy:

sigmayy_analitico = a*(a^2+(y).^2).^(-1/2);
sigmayy_analitico_ac = a_ac*(a_ac^2+(y_ac).^2).^(-1/2);

sigmayy_analitico_CC = a_CC*(a_CC^2+(y_CC).^2).^(-1/2);
sigmayy_analitico_CC_ac = a_CC_ac*(a_CC_ac^2+(y_CC_ac).^2).^(-
1/2);

sigmayy_numerico = [1.0003 0.99588 0.99033 0.98287 0.97015 0.95547
0.93923 0.92048 0.89924 0.87836 0.85674 0.83284 0.81017 0.78821
0.76462 0.74203 0.72107 0.69952 0.67816 0.65913 0.63996 0.62066
0.60354 0.58670 0.56984 0.55434 0.53963 0.52500 0.51107 0.49825
0.48554 0.47305 0.46188 0.45079 0.43976 0.42985 0.42012 0.41049
0.40153 0.39295 0.38451 0.37639 0.36883 0.36135 0.35399 0.34728
0.34062 0.33402 0.32795 0.32199 0.31611];
sigmayy_numerico_ac = [0.99944 0.99508 0.98957 0.98213 0.96943
0.95477 0.93856 0.91983 0.89862 0.87777 0.85618 0.83231 0.80967
0.78774 0.76418 0.74162 0.72068 0.69916 0.67782 0.65881 0.63967
0.62038 0.60328 0.58646 0.56961 0.55413 0.53943 0.52481 0.51089
0.49808 0.48537 0.47290 0.46173 0.45064 0.43962 0.42971 0.41998
0.41036 0.40140 0.39283 0.38439 0.37628 0.36871 0.36124 0.35388
0.34717 0.34051 0.33391 0.32785 0.32189 0.31600];

sigmayy_numerico_CC = [1.0002 0.99597 0.99058 0.98324 0.97059
0.95595 0.93974 0.92098 0.89974 0.87884 0.85721 0.83328 0.81059
0.78860 0.76498 0.74237 0.72138 0.69981 0.67842 0.65937 0.64018
0.62086 0.60373 0.58687 0.56999 0.55448 0.53976 0.52511 0.51117
0.49834 0.48561 0.47312 0.46194 0.45083 0.43979 0.42987 0.42013
0.41049 0.40153 0.39294 0.38449 0.37637 0.36879 0.36131 0.35395
0.34723 0.34056 0.33395 0.32789 0.32192 0.31602];
sigmayy_numerico_CC_ac = [0.99900 0.99481 0.98943 0.98210 0.96947
0.95487 0.93869 0.91998 0.89878 0.87794 0.85635 0.83248 0.80984
0.78790 0.76432 0.74176 0.72081 0.69928 0.67793 0.65892 0.63976
0.62046 0.60336 0.58653 0.56967 0.55418 0.53948 0.52484 0.51092
0.49810 0.48538 0.47290 0.46173 0.45063 0.43960 0.42969 0.41995
0.41032 0.40136 0.39278 0.38433 0.37621 0.36864 0.36115 0.35380
0.34708 0.34041 0.33380 0.32774 0.32177 0.31588];

figure;

```

```

plot(y,sigmayy_analitico,'k',y_ac,sigmayy_analitico_ac,'b',y_num,sigma
yy_numerico,'ok',y_num_ac,sigmayy_numerico_ac,'xb',y_CC,sigmayy_analit
ico_CC,'g',y_CC_ac,sigmayy_analitico_CC_ac,'m',y_num_CC,sigmayy_numeri
co_CC,'*g',y_num_CC_ac,sigmayy_numerico_CC_ac,'+m');
axis ([0 0.025 0.3 1]);
xlabel('y (mm)','fontsize',12);
ylabel('\sigma_{yy}/p_0','fontsize',12);
title('Gráfico de \sigma_{yy} para Contato','fontsize',12);
legend('Solução Analítica (Cilindro e Plano de
alumínio)','Solução Analítica (Cilindro de alumínio e Plano de
aço)','\sigma_{yy} numérico (Cilindro e Plano de
alumínio)','\sigma_{yy} numérico (Cilindro de alumínio e Plano de
aço)','Solução Analítica (Cilindros de alumínio)','Solução Analítica
(Cilindro de alumínio e Cilindro de aço) ','\sigma_{yy} numérico
(Cilindros de alumínio)','\sigma_{yy} numérico (Cilindro de alumínio e
Cilindro de aço)',0);
hold on;
grid on;

%% sigma zz:

sigmazx_analitico = 0.33*(sigmaxx_analitico + sigmayy_analitico);
sigmazx_analitico_ac = 0.33*(sigmaxx_analitico_ac +
sigmayy_analitico_ac);

sigmazx_analitico_CC = 0.33*(sigmaxx_analitico_CC +
sigmayy_analitico_CC);
sigmazx_analitico_CC_ac = 0.33*(sigmaxx_analitico_CC_ac +
sigmayy_analitico_CC_ac);

sigmazx_numerico = [0.65767 0.61952 0.58330 0.55026 0.51902
0.48894 0.46279 0.43768 0.41360 0.39277 0.37282 0.35409 0.33718
0.32134 0.30675 0.29299 0.28058 0.26888 0.25762 0.24778 0.23829
0.22915 0.22109 0.21331 0.20592 0.19912 0.19266 0.18660 0.18082
0.17547 0.17035 0.16539 0.16090 0.15654 0.15230 0.14844 0.14469
0.14108 0.13768 0.13442 0.13131 0.12831 0.12549 0.12276 0.12009
0.11762 0.11520 0.11284 0.11064 0.10849 0.10641];
sigmazx_numerico_ac = [0.65735 0.61923 0.58304 0.55003 0.51881
0.48876 0.46263 0.43755 0.41348 0.39268 0.37274 0.35403 0.33713
0.32131 0.30673 0.29298 0.28058 0.26889 0.25764 0.24780 0.23832
0.22919 0.22113 0.21336 0.20597 0.19918 0.19272 0.18666 0.18088
0.17553 0.17042 0.16546 0.16097 0.15661 0.15237 0.14852 0.14476
0.14115 0.13776 0.13450 0.13139 0.12839 0.12557 0.12284 0.12017
0.11770 0.11529 0.11292 0.11073 0.10858 0.10649];

sigmazx_numerico_CC = [0.65894 0.62065 0.58430 0.55116 0.51982
0.48966 0.46344 0.43827 0.41413 0.39327 0.37328 0.35451 0.33757
0.32171 0.30710 0.29332 0.28089 0.26917 0.25791 0.24805 0.23855
0.22940 0.22134 0.21355 0.20615 0.19934 0.19288 0.18681 0.18102
0.17567 0.17055 0.16558 0.16109 0.15673 0.15249 0.14863 0.14487
0.14125 0.13786 0.13459 0.13149 0.12848 0.12566 0.12292 0.12025
0.11778 0.11537 0.11300 0.11081 0.10866 0.10657];
sigmazx_numerico_CC_ac = [0.65817 0.61996 0.58368 0.55061 0.51933
0.48923 0.46306 0.43794 0.41384 0.39301 0.37305 0.35432 0.33740
0.32156 0.30697 0.29321 0.28079 0.26909 0.25784 0.24799 0.23850
0.22936 0.22130 0.21352 0.20613 0.19932 0.19286 0.18680 0.18101
0.17566 0.17055 0.16558 0.16110 0.15673 0.15249 0.14863 0.14488

```

```
0.14126 0.13787 0.13461 0.13150 0.12850 0.12567 0.12294 0.12027
0.11780 0.11539 0.11302 0.11083 0.10868 0.10659];
```

```
figure;
```

```
plot(y,sigmazz_analitico,'k',y_ac,sigmazz_analitico_ac,'b',y_num,sigma
zz_numerico,'ok',y_num_ac,sigmazz_numerico_ac,'xb',y_CC,sigmazz_analit
ico_CC,'g',y_CC_ac,sigmazz_analitico_CC_ac,'m',y_num_CC,sigmazz_numeri
co_CC,'*g',y_num_CC_ac,sigmazz_numerico_CC_ac,'+m');
axis auto;
xlabel('y (mm)','fontsize',12);
ylabel('\sigma_{zz}/p_0','fontsize',12);
title('Gráfico de \sigma_{zz} para Contato','fontsize',12);
legend('Solução Analítica (Cilindro e Plano de
alumínio)','Solução Analítica (Cilindro de alumínio e Plano de
aço)','\sigma_{zz} numérico (Cilindro e Plano de
alumínio)','\sigma_{zz} numérico (Cilindro de alumínio e Plano de
aço)','Solução Analítica (Cilindros de alumínio)','Solução Analítica
(Cilindro de alumínio e Cilindro de aço) ','\sigma_{zz} numérico
(Cilindros de alumínio)','\sigma_{zz} numérico (Cilindro de alumínio e
Cilindro de aço)',0);
hold on;
grid on;
```

```
%% tau xy:
```

```
y1 = 0:0.00001:0.39*a;
y2 = 0.37*a:0.00001:3*a;
y1_ac = 0:0.00001:0.39*a_ac;
y2_ac = 0.37*a_ac:0.00001:3*a_ac;

y1_CC = 0:0.00001:0.39*a_CC;
y2_CC = 0.37*a_CC:0.00001:3*a_CC;
y1_CC_ac = 0:0.00001:0.39*a_CC_ac;
y2_CC_ac = 0.37*a_CC_ac:0.00001:3*a_CC_ac;

sigmaxx_analitico1 = (1/a)*((a^2+2*y1.^2).*(a^2+y1.^2).^(-1/2)-
2.*y1);
sigmayy_analitico1 = a*(a^2+(y1).^2).^(-1/2);
sigmazz_analitico1 = 0.33*(sigmaxx_analitico1 +
sigmayy_analitico1);
sigmaxx_analitico2 = (1/a)*((a^2+2*y2.^2).*(a^2+y2.^2).^(-1/2)-
2.*y2);
sigmayy_analitico2 = a*(a^2+(y2).^2).^(-1/2);
sigmazz_analitico2 = 0.33*(sigmaxx_analitico2 +
sigmayy_analitico2);
tau_max_analitico1 = (sigmayy_analitico1 - sigmazz_analitico1)/2;
tau_max_analitico2 = (sigmayy_analitico2 - sigmazz_analitico2)/2;

sigmaxx_analitico1_ac =
(1/a_ac)*((a_ac^2+2*y1_ac.^2).*(a_ac^2+y1_ac.^2).^(-1/2)-2.*y1_ac);
sigmayy_analitico1_ac = a_ac*(a_ac^2+(y1_ac).^2).^(-1/2);
sigmazz_analitico1_ac = 0.33*(sigmaxx_analitico1_ac +
sigmayy_analitico1_ac);
sigmaxx_analitico2_ac =
(1/a_ac)*((a_ac^2+2*y2_ac.^2).*(a_ac^2+y2_ac.^2).^(-1/2)-2.*y2_ac);
```

```

    sigmayy_analitico2_ac = a_ac*(a_ac^2+(y2_ac).^2).^(-1/2);
    sigmazz_analitico2_ac = 0.33*(sigmaxx_analitico2_ac +
sigmayy_analitico2_ac);
    tau_max_analitico1_ac = (sigmayy_analitico1_ac -
sigmazz_analitico1_ac)/2;
    tau_max_analitico2_ac = (sigmayy_analitico2_ac -
sigmaxx_analitico2_ac)/2;

    sigmaxx_analitico1_CC =
(1/a_CC)*((a_CC^2+2*y1_CC.^2).*(a_CC^2+y1_CC.^2).^(-1/2)-2.*y1_CC);
    sigmayy_analitico1_CC = a_CC*(a_CC^2+(y1_CC).^2).^(-1/2);
    sigmazz_analitico1_CC = 0.33*(sigmaxx_analitico1_CC +
sigmayy_analitico1_CC);
    sigmaxx_analitico2_CC =
(1/a_CC)*((a_CC^2+2*y2_CC.^2).*(a_CC^2+y2_CC.^2).^(-1/2)-2.*y2_CC);
    sigmayy_analitico2_CC = a_CC*(a_CC^2+(y2_CC).^2).^(-1/2);
    sigmazz_analitico2_CC = 0.33*(sigmaxx_analitico2_CC +
sigmayy_analitico2_CC);
    tau_max_analitico1_CC = (sigmayy_analitico1_CC -
sigmazz_analitico1_CC)/2;
    tau_max_analitico2_CC = (sigmayy_analitico2_CC -
sigmaxx_analitico2_CC)/2;

    sigmaxx_analitico1_CC_ac =
(1/a_CC_ac)*((a_CC_ac^2+2*y1_CC_ac.^2).*(a_CC_ac^2+y1_CC_ac.^2).^(-
1/2)-2.*y1_CC_ac);
    sigmayy_analitico1_CC_ac = a_CC_ac*(a_CC_ac^2+(y1_CC_ac).^2).^(-
1/2);
    sigmazz_analitico1_CC_ac = 0.33*(sigmaxx_analitico1_CC_ac +
sigmayy_analitico1_CC_ac);
    sigmaxx_analitico2_CC_ac =
(1/a_CC_ac)*((a_CC_ac^2+2*y2_CC_ac.^2).*(a_CC_ac^2+y2_CC_ac.^2).^(-
1/2)-2.*y2_CC_ac);
    sigmayy_analitico2_CC_ac = a_CC_ac*(a_CC_ac^2+(y2_CC_ac).^2).^(-
1/2);
    sigmazz_analitico2_CC_ac = 0.33*(sigmaxx_analitico2_CC_ac +
sigmayy_analitico2_CC_ac);
    tau_max_analitico1_CC_ac = (sigmayy_analitico1_CC_ac -
sigmazz_analitico1_CC_ac)/2;
    tau_max_analitico2_CC_ac = (sigmayy_analitico2_CC_ac -
sigmaxx_analitico2_CC_ac)/2;

    tau_max_numerico = [0.17131 0.18818 0.20351 0.21630 0.22557
0.23326 0.23822 0.25732 0.27258 0.28325 0.29187 0.29635 0.29930
0.30133 0.29985 0.29811 0.29595 0.29214 0.28782 0.28371 0.27891
0.27345 0.26855 0.26350 0.25784 0.25264 0.24772 0.24227 0.23710
0.23239 0.22743 0.22246 0.21809 0.21360 0.20900 0.20493 0.20089
0.19674 0.19291 0.18928 0.18555 0.18198 0.17870 0.17535 0.17204
0.16907 0.16607 0.16305 0.16031 0.15761 0.15488];
    tau_max_numerico_ac = [0.17104 0.18792 0.20326 0.21605 0.22531
0.23301 0.23796 0.25688 0.27213 0.28279 0.29141 0.29590 0.29886
0.30090 0.29943 0.29770 0.29556 0.29176 0.28745 0.28335 0.27857
0.27312 0.26823 0.26319 0.25753 0.25235 0.24743 0.24199 0.23683
0.23212 0.22716 0.22220 0.21783 0.21335 0.20875 0.20468 0.20065
0.19650 0.19267 0.18904 0.18531 0.18175 0.17846 0.17512 0.17181
0.16884 0.16584 0.16281 0.16008 0.15738 0.15465];

    tau_max_numerico_CC = [0.17062 0.18766 0.20314 0.21604 0.22538
0.23315 0.23815 0.25694 0.27227 0.28298 0.29164 0.29614 0.29911

```

```

0.30116 0.29968 0.29794 0.29579 0.29197 0.28765 0.28354 0.27874
0.27328 0.26837 0.26332 0.25764 0.25245 0.24752 0.24206 0.23689
0.23218 0.22720 0.22223 0.21785 0.21336 0.20875 0.20468 0.20063
0.19647 0.19265 0.18901 0.18527 0.18170 0.17841 0.17506 0.17175
0.16877 0.16576 0.16273 0.16000 0.15729 0.15455];
    tau_max_numerico_CC_ac = [0.17042 0.18742 0.20288 0.21575 0.22507
0.23282 0.23781 0.25644 0.27175 0.28246 0.29112 0.29564 0.29862
0.30068 0.29922 0.29750 0.29537 0.29157 0.28727 0.28318 0.27840
0.27295 0.26806 0.26302 0.25736 0.25218 0.24726 0.24181 0.23665
0.23195 0.22698 0.22202 0.21765 0.21316 0.20855 0.20449 0.20044
0.19629 0.19246 0.18883 0.18509 0.18152 0.17823 0.17488 0.17157
0.16859 0.16559 0.16255 0.15982 0.15711 0.15437];

figure;

plot(y1,tau_max_analitico1,'k',y1_ac,tau_max_analitico1_ac,'b',y2,tau_
max_analitico2,'k',y2_ac,tau_max_analitico2_ac,'b',y_num,tau_max_numer
ico,'ko',y_num_ac,tau_max_numerico_ac,'b*',y1_CC,tau_max_analitico1_CC
,'g',y1_CC_ac,tau_max_analitico1_CC_ac,'m',y2_CC,tau_max_analitico2_CC
,'g',y2_CC_ac,tau_max_analitico2_CC_ac,'m',y_num_CC,tau_max_numerico_C
C,'g+',y_num_CC_ac,tau_max_numerico_CC_ac,'mx');
    axis auto;
    xlabel('y (mm)','fontsize',12);
    ylabel('\tau_{xy} / p_0','fontsize',12);
    title('Gráfico de \tau_{xy} para Contato','fontsize',12);
    legend('Solução Analítica (Cilindro e Plano de
alumínio)', 'Solução Analítica (Cilindro de alumínio e Plano de
aço)', '', '\tau_{xy} numérico (Cilindro e Plano de
alumínio)', '\tau_{xy} numérico (Cilindro de alumínio e Plano de
aço)', 'Solução Analítica (Cilindros de alumínio)', 'Solução Analítica
(Cilindro de alumínio e Cilindro de aço)', '\tau_{xy} numérico
(Cilindros de alumínio)', '\tau_{xy} numérico (Cilindro de alumínio e
Cilindro de aço)',0);
    hold on;
    grid on;

```

C – CÁLCULO DO MÓDULO TANGENTE

Alumínio:

$$\text{módulo tangente}_{\text{alumínio}} = (S_{ut} - S_y) / \left(\epsilon_f - \frac{S_y}{E} \right)$$

$$\text{módulo tangente}_{\text{alumínio}} = (186\text{MPa} - 165\text{MPa}) / \left(0,015 - \frac{165\text{MPa}}{68900\text{MPa}} \right)$$

$$\text{módulo tangente}_{\text{alumínio}} = 1666$$

Aço:

$$módulo\ tangente_{aço} = (S_{ut} - S_y) / \left(\epsilon_f - \frac{S_y}{E} \right)$$

$$módulo\ tangente_{alumínio} = (1410MPa - 1240MPa) / \left(0,04 - \frac{1240MPa}{200000MPa} \right)$$

$$módulo\ tangente_{alumínio} = 5030$$